TRATTATO ELEMENTARE

SULLA

MECCANICA RAZIONALE

CON MOLTI ESEMPII

Compilato sulle opere di TODHUNTER, TAIT, STEELE, ROUTH ed altri autori:

DA

G. BATTAGLINI

PROFESSORE DI GEOMETRIA SUPERIORE NELLA UNIVERSITA' DI ROMA.

VOLUME PRIMO

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI B. PELLERANO
Strada di Chiaia 60.
1873.

AVVERTIMENTO DEL COMPILATORE.

L'opera che presentiamo agli Studenti delle nostre Università è destinata a servir loro di guida nello studio della Meccanica razionale. Il merito singolare dei libri inglesi di testo per l'insegnamento delle Matematiche non ci lasciavano in dubbio su quali opere dovesse cadere la scelta per una traduzione italiana; se non che la mancanza di un Trattato completo in inglese di Meccanica razionale, che potesse adattarsi al nostro insegnamento universitario, ci ha costretto a compilare il nostro lavoro su diverse opere, ciascuna eccellente nel suo genere. Abbiamo tradotto perciò, 1° il *Trattato sulla Statica analitica* di TODHUNTER, togliendone alcuni Capitoli, non essenziali per un Corso di Meccanica razionale; 2° il *Trattato sulla Dinamica di un Elemento* di TAIT e STEELE, con leggerissime omissioni; 3°, ed una gran parte del *Trattato sulla Dinamica di un Sistema di Corpi rigidi* di ROUTH. Con ciò crediamo di offrire agli Studiosi una completa opera d'istituzione intorno alla Meccanica dei Solidi. In quanto alla Meccanica dei Fluidi la scelta di un'opera adatta e della stessa indole delle altre non era facile; abbiamo dovuto contentarci perciò della traduzione dal francese dell'*Idrostatica* e dell'*Idrodinamica* di DUHAMEL, le quali, sebbene esposte con metodo diverso da quello seguìto nella Statica e nella Dinamica sopra indicate, sono non pertanto di un merito incontrastabile.

INDICE DEL PRIMO VOLUME.

STATICA.

DINAMICA DI UN ELEMENTO.

STATICA.

CAPITOLO I.

Introduzione.

1. Corpo è una porzione di materia limitata in ogni direzione, e per conseguenza determinata di forma e di volume. Elemento materiale è un corpo indefinitamente piccolo in ogni direzione.

2. Un corpo è in moto quando esso o le sue parti occupano successivamente diverse posizioni nello spazio. Però non possiamo giudicare dello stato di quiete o di moto di un corpo senza paragonarlo con altri corpi, e per questa ragione tutt'i movimenti che osserviamo sono necessariamente moti *relativi*.

3. Forza è ciò che produce o tende a produr moto in un corpo.

4. Quando più forze agiscono simultaneamente su di un corpo, può accadere che esse si neutralizzino tra loro; allorchè un corpo rimane in quiete benchè sollecitato da forze, si dice che esso è in equilibrio; o, in altri termini, si dice che le forze mantengono l'equilibrio.

5. La Meccanica è la scienza che tratta delle leggi dell'equilibrio e del moto dei corpi. La Statica tratta delle leggi dell'equilibrio, e la Dinamica delle leggi del moto.

6. Vi sono tre cose da considerare in una forza che agisce su di un elemento materiale: la *posizione* dell'elemento; la *direzione* della forza, cioè, la direzione secondo la quale essa tende a far muovere l'elemento; e l'*intensità* della forza. Siccome le dimensioni di un elemento sono indefinitamente piccole la sua posizione si può determinare come si determina quella di un punto in geometria, e la direzione della forza si può determinare come si determina quella di una linea retta. Passiamo quindi a considerare la grandezza o intensità della forza.

7. Le forze si possono misurare prendendo una determinata forza per unità, ed esprimendo con numeri i rapporti che le altre forze serbano a questa unità. Due forze sono *eguali* quando applicate in direzioni opposte ad un elemento mantengono l'equilibrio. Se prendiamo due forze *eguali* e le applichiamo ad un elemento nella *stessa* direzione otteniamo una forza *doppia* di ciascuna; se uniamo *tre* forze eguali otteniamo una forza *tripla;* e così di seguito.

Adunque quando diciamo che una forza applicata ad un elemento è un certo multiplo di un'altra forza, intendiamo che la prima forza si può supporre composta di un certo numero di forze eguali alla seconda e tutte agenti nella stessa direzione. In questo modo le forze diventano quantità misurabili, le quali si possono esprimere con numeri, come tutte le altre quantità, riferendole ad una unità della loro stessa specie. Le forze si possono anche rappresentare con linee rette proporzionali in lunghezza a quei numeri, tirate dal punto sul quale le forze agiscono e nelle direzioni secondo le quali esse agiscono.

8. L'esperienza c'insegna che se un corpo è lasciato libero dalla mano, esso cadrà in una certa direzione; comunque spesso si faccia l'esperimento, il risultato è lo stesso, il corpo colpisce ogni volta il suolo nello stesso luogo, purchè rimanga lo stesso il posto dal quale si è lasciato cadere. La causa di questo effetto costante si suppone essere un'affinità che tutt'i corpi hanno con la terra, e che si chiama la forza di attrazione. Se s'impedisce la caduta del corpo interponendo una tavola o la mano, il corpo esercita una *pressione* sulla tavola o sulla mano. *Peso* è il nome dato alla pressione che per l'attrazione della terra un corpo esercita su di un altro col quale esso trovasi a contatto.

9. Un corpo solido si concepisce come un aggregato di elementi materiali che sono mantenuti assieme dalle loro mutue affinità. Questa ipotesi è giustificata dagli esperimenti, i quali mostrano che ogni corpo è divisibile in porzioni successivamente più piccole senza limite, se una forza sufficiente si adopera a vincere le azioni scambievoli delle parti del corpo.

10. Un corpo rigido è quello in cui gli elementi ritengono posizioni invariabili tra di loro. Nessun corpo in natura è perfettamente rigido; ogni corpo cede più o meno alle forze che agiscono su di esso. Se, quindi, in ogni caso questa compressibilità è di grandezza sensibile, supporremo che il corpo abbia preso la sua figura di equilibrio, ed allora considereremo i punti di applica-

zione delle forze come un sistema di forma invariabile. Per corpo, da ora innanzi, intenderemo un corpo *rigido.*

11. Allorchè una forza agisce su di un corpo l'effetto della forza non sarà cambiato a qualunque punto della sua direzione la supporremo applicata, purchè questo punto sia o uno dei punti del corpo o pure sia connesso col corpo invariabilmente. Questo principio è conoscinto col nome della *trasmissibilità di una forza in un punto qualunque della sua linea d'azione;* esso è ammesso come un assioma o come un fatto sperimentale. Possiamo mostrare a che equivalga ciò che si ammette nell'assioma, col procedimento seguente.

Supponiamo che un corpo sia mantenuto in equilibrio da un sistema di forze, una delle quali è la forza P applicata al punto A. Si prenda un punto qualunque B nella direzione di qnesta forza, e si supponga B connesso con A in modo che la distanza AB sia invariabile. Allora, se in B introduciamo due forze, P' e P'', eguali in grandezza ed agenti in direzioni opposte secondo la linea retta AB, sembra evidente che nessun cambiamento si produce nell'effetto della forza P in A. Ora *ammettiamo che* P *in* A *e* P' *in* B *si neutralizzino tra loro, e quindi possano essere tolte senza disturbare l'equilibrio del corpo;* allora rimane la forza P'' in B producente lo stesso effetto come quando essa agiva in A.

12. Avremo occasione in appresso di ammettere ciò che può chiamarsi l'*inverso* del principio della trasmissibilità della forza, vale a dire, che se una forza si pnò trasferire dal suo punto d'applicazione ad un secondo punto senza alterare il suo effetto, allora il secondo punto deve essere nella direzione della forza. Si vegga l'Art. 17.

13. Quando troveremo utile di cambiare il pnnto d'applicazione di una forza, per brevità non sempre esprimeremo che il nuovo punto sia *invariabilmente connesso* col primitivo, ma ciò deve sempre essere sottinteso.

CAPITOLO II.

Composizione ed equilibrio delle forze che agiscono su di un elemento.

14. Quando un elemento è sollecitato da forze che non mantengono l'equilibrio esso incomincerà a muoversi in una determinata direzione. È chiaro allora che si possa trovare una forza *sola* di una tale grandezza, che se agisse nella direzione *opposta* a quella secondo la quale il movimento dovrebbe aver luogo questa forza impedirebbe il movimento, e per conseguenza sarebbe in equilibrio con le altre forze che agiscono sull'elemento. Se quindi togliessimo le forze primitive e le rimpiazzassimo con una forza sola, eguale in grandezza a quella detta di sopra, ma agente nella direzione opposta, l'elemento rimarrebbe ancora in quiete. Questa forza, che è equivalente nel suo effetto all'effetto combinato delle forze primitive, si chiama la loro *risultante*, e le forze primitive si chiamano le *componenti* della risultante.

Sarà necessario quindi d'incominciare col dare delle regole per la *composizione delle forze;* cioè, per trovare la loro forza risultante. Dopo che le avremo determinate, sarà facile di dedurre le relazioni analitiche che le forze debbono soddisfare quando sono in equilibrio.

15. *Trovare la risultante di un dato numero di forze che agiscono su di un elemento secondo la stessa linea retta; e trovare la condizione che esse debbono soddisfare affinchè si facciano equilibrio.*

Quando due o più forze agiscono su di un elemento nella stessa direzione è evidente che la forza risultante è eguale alla loro somma ed agisce nella stessa direzione.

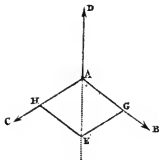
Quando due forze agiscono in direzioni diverse, ma secondo la stessa linea retta, su di un elemento, è chiaro egualmente che la loro risultante è eguale alla loro differenza ed agisce nella direzione della componente maggiore.

Quando più forze agiscono in direzioni diverse, ma secondo la stessa linea retta, su di un elemento, la risultante delle forze che agiscono in una direzione è eguale alla somma di queste forze, ed agisce nella stessa direzione; e così per le forze che agiscono nella direzione opposta. La risultante, quindi, di tutte le forze è eguale alla differenza di queste somme, ed agisce nella direzione della somma maggiore.

Se le forze che agiscono in una direzione sono considerate positive, e quelle nella direzione opposta negative, allora la loro risultante è eguale alla loro somma *algebrica*; il suo segno determina la direzione secondo la quale essa agisce.

Affinchè le forze siano in equilibrio, la loro risultante, e quindi la loro somma algebrica, deve svanire.

16. Vi è un altro caso in cui possiamo facilmente determinare la grandezza e la direzione della risultante.

Siano AB, AC, AD le direzioni di tre forze eguali che agiscono sull'elemento A; supponiamo tutte queste forze nello stesso piano e ciascuno dei tre angoli BAC, CAD, DAB eguale a 120°; l'elemento resterà in quiete, non essendovi alcuna ragione perchè l'elemento dovesse muoversi in una direzione piuttosto che in un'altra. Ciascuna delle forze è quindi eguale ed opposta alla risultante delle altre due. Ma se prendiamo nelle direzioni di due tra esse, AB, AC, due linee rette eguali AG, AH per rappresentare le forze, e completiamo il parallelogrammo $GAHE$, la diagonale AE si troverà nella stessa linea retta con AD. Inoltre il triangolo AGE sarà equilatero, e perciò $AE = AG$. Quindi, la diagonale AE del parallelogrammo costruito sopra AG, AH rappresenta la risultante delle due forze rappresentate rispettivamente da AG ed AH.

Questa proposizione è un caso particolare di quella alla quale ora procediamo.

17. *Se due forze agenti su di un punto sono rappresentate in direzione e grandezza da due linee rette condotte pel punto, e si descrive un parallelogrammo su queste linee rette come lati adiacenti, allora la risultante sarà rappresentata in direzione e grandezza da quella diagonale del parallelogrammo che passa pel punto.*

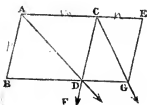
Questa Proposizione si chiama il *Parallelogrammo delle forze.*

I. Trovare la *direzione* della risultante.

Quando le forze sono eguali è chiaro che la direzione della ri-

sultante *biseghera* l'angolo tra le direzioni delle forze; o sia, se rappresentiamo le forze in grandezza e direzione con due linee rette condotte pel punto su cui esse agiscono, e descriviamo un parallelogrammo su queste linee rette, quella diagonale del parallelogrammo che passa pel punto sarà la direzione della risultante.

Ammettiamo che ciò sia vero per le forze p ed m inclinate sotto un angolo qualunque, ed anche per le forze p ed n inclinate sotto lo stesso angolo; possiamo mostrare che allora ciò deve essere vero per due forze p ed $m+n$ anche inclinate sotto lo stesso angolo.

Sia A il punto sul quale agiscono le forze p ed m; siano AB, AC le loro direzioni e proporzionali ad esse in grandezza: si completi il parallelogrammo BC, e si tiri la diagonale AD; allora, per ipotesi, la risultante di p ed m agisce secondo AD.

Inoltre, si prenda CE che abbia ad AC lo stesso rapporto di n ad m. Per l'Art. 11 possiamo supporre la forza n che agisce nella direzione AE essere applicata in A o in C; e quindi le forze p, m, ed n, nelle linee rette AB, AC, e CE, sono lo stesso che p ed $m+n$ nelle linee rette AB ed AE.

Ora si sostituisca a p ed m la loro risultante e si trasferisca il suo punto d'applicazione da A in D; indi si risolva questa forza in D secondo le parallele ad AB ed AC rispettivamente; queste parti risolute debbono essere evidentemente p ed m, la prima agente nella direzione DF, e la seconda nella direzione DG. Indi si trasferisca p in C ed m in G.

Ma, per ipotesi, p ed n agenti in C hanno una risultante nella direzione CG; quindi si può sostituire a p ed n la loro risultante e trasferire il suo punto d'applicazione in G. Ed m è stata anche trasferita in G. Quindi con questo procedimento abbiamo trasportate le forze che agivano in A al punto G senza alterare il loro effetto. Possiamo quindi dedurre (si vegga l'Art. 12) che G è un punto nella direzione della risultante di p ed $m+n$ in A; cioè, la risultante di p ed $m+n$ agisce nella direzione della diagonale AG, purchè l'ipotesi sia esatta. Ma l'ipotesi è esatta per le forze eguali, come p, p, e perciò essa è vera per le forze $p, 2p$; per conseguenza per $p, 3p$, e così di seguito; quindi essa è vera per $p, r \cdot p$.

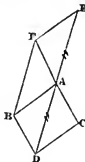
Quindi essa è vera per $p, r \cdot p$, e $p, r \cdot p$, e per conseguenza per $2p, r \cdot p$, e così di seguito; ed essa è finalmente vera per $s \cdot p$ ed $r \cdot p$, in cui r ed s sono interi positivi.

Dobbiamo mostrare ancora che la Proposizione è vera per le forze *incommensurabili*.

Questo si può dedurre dal fatto che quando due grandezze sono incommensurabili, sicchè il rapporto di una di esse all'altra non possa essere espresso *esattamente* da una frazione, possiamo sempre trovare una frazione che differisce dal vero rapporto per una frazione minore di una frazione assegnata qualunque. O pure ciò si può stabilire indirettamente nel seguente modo.

Rappresentino AB, AC due tali forze. Si completi il parallelogrammo BC. Allora se la loro risultante non agisce secondo AD supponiamo che essa agisca secondo AE; si tiri EF parallela a BD. Si divida AC in parti eguali, ciascuna minore di DE; si segnino sopra CD porzioni eguali a queste, e sia K l'ultima divisione; questa evidentemente cade tra D e E; si tiri GK parallela ad AC. Allora due forze rappresentate da AC, AG hanno una risultante nella direzione AK, poichè esse sono commensurabili; quindi le forze AC ed AB sono equivalenti ad AK insieme con una forza eguale a GB applicata in A secondo AB. E possiamo ammettere come evidente che la risultante di queste forze deve giacere *tra* AK ed AB; ma per supposizione la risultante è AE che *non* cade tra AK ed AB. Questo è assurdo.

Nello stesso modo possiamo mostrare che ogni direzione diversa da AD conduce ad un'assurdità, e quindi la risultante deve agire secondo AD, siano le forze commensurabili o incommensurabili.

II. Trovare la *grandezza* della risultante.

Siano AB, AC le direzioni delle forze date, AD quella della loro risultante; si prenda AE opposta ad AD, e di una lunghezza tale da rappresentare la *grandezza* della risultante. Allora le forze rappresentate da AB, AC, AE, si equilibrano tra di loro. Sopra AE ed AB come lati adiacenti si costruisca il parallelogrammo $ABFE$; allora la diagonale AF è la direzione della risultante di AE ed AB.

Quindi AC è nella stessa linea retta con AF, quindi FD è un parallelogrammo; e perciò $AE=FB=AD$. Quindi la risultante è rappresentata in *grandezza* come in direzione dalla diagonale del parallelogrammo.

Così la proposizione chiamata il *Parallelogrammo delle forze* è completamente stabilita.

18. Quindi se P e Q rappresentano due forze componenti agenti sotto un angolo α su di un elemento, la risultante R è data dall'equazione

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha.$$

19. *Quando tre forze che agiscono su di un elemento sono in equilibrio esse sono rispettivamente proporzionali ai seni degli angoli compresi dalle direzioni delle altre due.*

Poichè se ci riferiamo alla terza figura dell' Art. 17 abbiamo

$$P : Q : R :: AB : AC \text{ (o } BD) : AD$$
$$:: \operatorname{sen} ADB : \operatorname{sen} BAD : \operatorname{sen} ABD$$
$$:: \operatorname{sen} CAE : \operatorname{sen} BAE : \operatorname{sen} BAC.$$

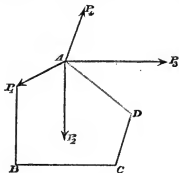
Viceversa se tre forze agiscono su di un elemento, e ciascuna forza è proporzionale al seno dell'angolo tra le direzioni delle altre due, si può mostrare che una delle forze è eguale in *grandezza* alla risultante delle altre due, ed agisce o nella *stessa* direzione o nella direzione *opposta*: nell'ultimo caso le tre forze sono in equilibrio.

Si osservi che se i lati di un triangolo si tirano paralleli alle direzioni delle forze, la lunghezza di ogni lato sarà proporzionale al seno dell'angolo tra le forze che corrispondono agli altri due lati.

20. Una forza qualunque che agisce su di un elemento si può rimpiazzare con due altre, se i lati di un triangolo condotti parallelamente alle direzioni delle forze hanno la stessa proporzione relativa di quella delle forze. Infatti pel parallelogrammo delle forze la risultante di queste due ultime forze è eguale alla forza data.

Questo si chiama la *risoluzione* di una forza.

21. Poichè la risultante di due forze che agiscono su di un elemento è rappresentata in grandezza e direzione dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle linee rette che rappresentano queste forze in grandezza e direzione, ne segue che per ottenere la risultante delle forze P_1, P_2, P_3, ... che agiscono sopra un elemento A, e sono rappresentate dalle linee rette AP_1, AP_2, AP_3, ... possiamo procedere come segue.

Si trovi la risultante di P_1 e P_2, si componga questa risultante con P_3, questa nuova risultante con P_4, e così di seguito.

Segue da ciò, che se si costruisce un poligono AP_1BCD, di cui i lati sono rispettivamente eguali e paralleli alle linee rette AP_1, AP_2, ... e si congiunge A con l'ultimo vertice D, la linea retta AD rappresenterà in grandezza e direzione la risultante di tutte le forze.

Possiamo conchiudere che la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un numero qualunque di forze che agiscono su di un elemento si è, che il punto D coincida con A; cioè, che la figura $AP_1B...D$ sia un poligono *completo*. Le forze nella figura non sono necessariamente tutte in un piano.

Il risultato qui ottenuto si può enunciare così: *Se i lati di un poligono qualunque presi in ordine sono rispettivamente proporzionali alle grandezze delle forze che agiscono su di un punto, e sono parallele alle direzioni delle forze, le forze saranno allora in equilibrio.*

Questa proposizione si chiama il *Poligono delle Forze.*

La direzione e la grandezza della risultante si può anche determinare analiticamente, come negli Articoli seguenti:

22. *Un numero qualunque di forze agiscono su di un elemento in un piano; trovare la grandezza e la direzione della loro risultante.*

Siano P_1, P_2, P_3,... le forze, ed α_1, α_2, α_3,... gli angoli che le loro direzioni fanno con una retta fissa condotta pel punto proposto. Si prenda questa retta fissa per l'asse delle x, e la perpendicolare ad essa per quello delle y. Allora, per l'Art. 20, P_1 si può risolvere in $P_1 \cos\alpha_1$, e $P_1 \operatorname{sen}\alpha_1$ agenti secondo gli assi delle x e delle y rispettivamente. Le altre forze si possono risolvere similmente. Per l'addizione algebrica delle forze che agiscono secondo la stessa linea retta abbiamo

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \dots \text{ secondo l'asse delle } x,$$

$$P_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + P_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + P_3 \operatorname{sen}\alpha_3 + \dots \text{ secondo l'asse delle } y.$$

Esprimeremo la prima con $\Sigma P \cos\alpha$ e la seconda con $\Sigma P \operatorname{sen}\alpha$, dove il simbolo Σ dinota che si prende la somma di tutte le quantità di cui la quantità che lo segue è il tipo.

Se poniamo $P_1 \cos\alpha_1 = X_1$ e $P_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = Y_1$, ed usiamo una simile notazione per le altre componenti, abbiamo due forze che rimpiazzano l'intero sistema, cioè ΣX secondo l'asse delle x e ΣY secondo quello delle y. Se R dinota la risultante di queste forze ed a l'angolo secondo il quale essa è inclinata all'asse delle x, abbiamo, per l'Art. 17,

$$R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2,$$

$$\tan a = \frac{\Sigma Y}{\Sigma X}.$$

Inoltre
$$\cos a = \frac{\Sigma X}{R}; \quad \operatorname{sen} a = \frac{\Sigma Y}{R}.$$

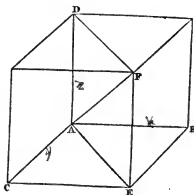
23. *Trovare le condizioni di equilibrio quando un numero qualunque di forze agiscono su di un elemento in un piano.*

Quando le forze sono in equilibrio dobbiamo avere $R = 0$; quindi

$$(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 = 0;$$

onde
$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0;$$

e queste sono le condizioni tra le forze affinchè esse siano in equilibrio.

24. *Tre forze agiscono su di un elemento in direzioni ad angoli retti tra di loro; trovare la grandezza e la direzione della loro risultante.*

Rappresentino AB, AC, AD le tre forze X, Y, Z in grandezza e direzione. Si completi il parallelogrammo BC, e si tiri la diagonale AE; allora AE rappresenta la risultante di X ed Y in grandezza e direzione, per l'Art. 17. Ora la risultante di questa forza e di Z, cioè, delle forze rappresentate da AE, AD, è rappresentata in grandezza e direzione da AF, diagonale del parallelogrammo DE. Quindi la risultante di X, Y, Z è rappresentata in grandezza e direzione da AF. Sia R la grandezza della risultante, e siano a, b, c gli angoli che la di-

rezione di R fa con quelle di X, Y, Z. Allora, poichè

$$AF^2 = AE^2 + AD^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2,$$

sarà
$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Inoltre $\cos a = \frac{AB}{AF} = \frac{X}{R}$, $\cos b = \frac{AC}{AF} = \frac{Y}{R}$, $\cos c = \frac{AD}{AF} = \frac{Z}{R}$.

Così sono determinate la grandezza e la direzione della risultante.

25. Segue dall'ultimo Articolo che una forza qualunque R la direzione della quale fa gli angoli a, b, c con tre assi rettangolari fissi nello spazio, può essere rimpiazzata dalle tre forze $R \cos a$, $R \cos b$, $R \cos c$, agenti simultaneamente sull'elemento sul quale agisce R, e che hanno le loro direzioni parallele agli assi delle coordinate rispettivamente.

26. *Più forze agiscono su di un elemento in direzione qualunque; trovare la grandezza e la direzione della loro risultante.*

Siano $P_1, P_2, P_3, \ldots$ le forze; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ gli angoli che la direzione di P_1 fa con tre assi rettangolari condotti pel punto proposto; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gli angoli che la direzione di P_2 fa con gli stessi assi; e così di seguito.

Allora, per l'Art. 25, le componenti di P_1 nelle direzioni degli assi sono

$P_1 \cos \alpha_1$, $P_1 \cos \beta_1$, $P_1 \cos \gamma_1$, (o X_1, Y_1, Z_1, supponiamo).

Si risolva ciascuna delle altre forze nello stesso modo, e si riduca il sistema a tre forze, addizionando quelle che agiscono nella stessa linea retta, Art. 15; abbiamo così

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots \quad \text{o} \quad \Sigma P \cos \alpha, \quad \text{o} \quad \Sigma X,$$
$$P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \ldots \quad \text{o} \quad \Sigma P \cos \beta, \quad \text{o} \quad \Sigma Y,$$
$$P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \ldots \quad \text{o} \quad \Sigma P \cos \gamma, \quad \text{o} \quad \Sigma Z,$$

agenti nelle direzioni degli assi delle x, y, e z rispettivamente.

Se chiamiamo R la risultante, ed a, b, c gli angoli che la sua direzione fa con gli assi, abbiamo, per l'Art. 24,

$$R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2,$$

e
$$\cos a = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma Z}{R}.$$

27. *Trovare le condizioni di equilibrio quando più forze agiscono su di un elemento.*

Si moltiplichi la prima per $\cos\alpha'$, la seconda per $\cos\beta'$, e la terza per $\cos\gamma'$, e si sommi. Allora, se $\theta_1, \theta_2 \ldots$ dinotano gli angoli che $P_1, P_2, \ldots$ fanno con la linea retta tirata arbitrariamente, e θ dinota l'angolo che la risultante R fa con essa, abbiamo, per la formola del coseno dell'angolo tra due linee rette citata nell'Art. 28

$$R\cos\theta = P_1\cos\theta_1 + P_2\cos\theta_2 + \ldots$$

30. Dall'Art. 20 è chiaro che una data forza si può risolvere in due altre in infiniti modi. Quando parliamo della parte risoluta di una forza in una data direzione, come nell'Articolo precedente, *supporremo sempre, a meno che non si esprima il contrario*, che la forza data si risolva in due forze, l'una nella *data direzione* e l'altra in una direzione *ad angoli retti sulla direzione data*. La prima componente si dirà la forza risoluta nella data direzione.

Quando delle forze agiscono su di un elemento esso sarà in equilibrio, purchè le somme delle forze risolute secondo tre direzioni qualunque che non giacciono in un piano siano zero. Infatti se le forze non si equilibrano, esse debbono avere una sola risultante; e siccome una linea retta non può essere ad angoli retti su tre linee rette che s'incontrano in un punto e non sono nello stesso piano, la parte risoluta della risultante, e quindi la somma delle parti risolute delle forze date, secondo queste tre linee rette, non può svanire, il che è contrario all'ipotesi.

31. Nell'Art, 26 risolvemmo ciascuna forza di un sistema in tre altre secondo tre assi *rettangolari*. Nello stesso modo possiamo, se ci piace, risolvere ciascuna forza secondo tre linee rette che formano un *sistema di assi obliqui*. Infatti sia che la figura nell'Art. 24 rappresenti un parallelepipedo *obliquo o rettangolare*, la forza AF si può risolvere in AD ed AE, e l'ultima di nuovo si può risolvere in AB ed AC. Quindi la risultante di un sistema di forze può essere rappresentata dalla diagonale di un parallelepipedo obliquo, e per l'equilibrio sarà necessario che questa diagonale svanisca, e quindi che svaniscano gli spigoli del parallelepipedo.

I tre articoli seguenti sono casi particolari dell'equilibrio di un elemento.

32. *Determinare la condizione di equilibrio di un elemento sollecitato da forze qualunque e costretto a rimanere sopra una data curva levigata.*

Per una curva *levigata* intendiamo una curva che può sola-

mente esercitare forza sull'elemento in una direzione ***normale*** alla curva nel punto di contatto.

Dinotino X, Y, Z le forze che agiscono sull'elemento in direzioni parallele a tre assi rettangolari, eccettuata l'azione della curva. Dinotino x, y, z le coordinate dell'elemento, ed s la lunghezza dell'arco misurato da un punto fisso sino al punto (x,y,z). Allora per la Geometria analitica a tre dimensioni i coseni degli angoli che la tangente della curva nel punto (x, y, z) fa con gli assi sono $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, rispettivamente. Le forze che agiscono sull'elemento essendo risolute secondo la tangente della curva, la loro somma è

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}.$$

Se questa non svanisce, non vi sarà nulla che impedisca il moto dell'elemento; per l'equilibrio quindi dobbiamo avere

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0.$$

Viceversa se ha luogo questa relazione l'elemento resterà in quiete, poichè non vi è alcuna forza per farlo muovere *lungo la curva*, che è il solo movimento di cui esso è capace.

Abbiamo supposto l'elemento situato nell'interno di un tubo che ha la forma della curva. Però se l'elemento è semplicemente posto in *contatto con una curva*, sarà *inoltre* necessario per l'equilibrio che la risultante delle forze prema l'elemento *contro* la curva e non lo stacchi *dalla* curva.

33. *Determinare le condizioni di equilibrio di un elemento sollecitato da forze qualunque e costretto a rimanere sopra una data superficie levigata.*

Una superficie *levigata* è quella che non può esercitare alcuna forza sull'elemento eccetto che in una direzione normale alla superficie.

Dinotino X, Y, Z le forze che agiscono sull'elemento in direzioni parallele a tre assi rettangolari, eccettuata l'azione della superficie. La risultante di X, Y, Z deve agire in una direzione normale alla superficie nel punto dove è situato l'elemento; poichè se ciò non fosse, potremmo decomporre la risultante in due forze, l'una secondo la normale e l'altra ad angoli retti sulla normale, delle quali la seconda porrebbe in moto l'elemento. I coseni degli angoli che la risultante di X, Y, Z fa con gli assi sono proporzionali ad X, Y, Z rispettivamente; e se $F(x,y,z)=0$ è l'equa-

zione della superficie, i coseni degli angoli che la normale alla superficie nel punto (x, y, z) fa con gli assi, sono per la Geometria analitica a tre dimensioni proporzionali a $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$, e $\frac{dF}{dz}$ rispettivamente. Quindi per l'equilibrio dobbiamo avere

$$\frac{X}{\frac{dF}{dx}} = \frac{Y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{Z}{\frac{dF}{dz}}.$$

Se queste relazioni sono soddisfatte, la forza risultante è diretta secondo la normale; quindi, se supponiamo l'elemento incapace di lasciare la superficie, le condizioni precedenti saranno sufficienti per assicurare il suo equilibrio; ma se l'elemento è semplicemente situato *sopra* una superficie, sarà inoltre necessario che X, Y, Z agiscano in modo che la loro risultante prema l'elemento *contro la superficie*. Per esempio, se l'elemento è situato sulla parte esterna di una sfera, la risultante di X, Y, e Z deve agire *verso* il centro della sfera.

34. Supponiamo che si voglia determinare l'azione che la curva o la superficie esercita sull'elemento nei casi precedenti. Dinotiamola con R, e siano α, β, γ gli angoli che la sua direzione fa con gli assi. Poichè R e le forze X, Y, Z mantengono l'elemento in equilibrio, abbiamo per l'Art. 27,

$$R\cos\alpha + X = 0, \quad R\cos\beta + Y = 0, \quad R\cos\gamma + Z = 0 \ldots(1).$$

Inoltre quando l'elemento sta sopra una superficie curva di cui l'equazione è $F(x, y, z) = 0$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, e $\cos\gamma$ sono conosciuti in termini delle coordinate dell'elemento, poichè essi sono proporzionali a $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$ rispettivamente. Quindi le equazioni (1) e quella della superficie determineranno x, y, z ed R, se X, Y, Z sono date.

Se l'elemento sta sopra una linea curva, allora, poichè la direzione di R è perpendicolare a quella della tangente della curva, abbiamo l'equazione seguente dalla Geometria analitica a tre dimensioni,

$$\cos\alpha\frac{dx}{ds} + \cos\beta\frac{dy}{ds} + \cos\gamma\frac{dz}{ds} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Poichè $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$, e $\frac{dz}{ds}$ si possono esprimere, teoreticamente almeno, in termini di x, y, e z, l'equazione (2) dà una relazione

tra $\cos\alpha$, $\cos\beta$, e $\cos\gamma$, ed x, y, e z. Così (1) e (2) unite alle due equazioni della curva ed all'equazione

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

sono sufficienti per determinare le sette quantità R, x, y, z, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, e $\cos\gamma$.

Possiamo osservare che da (1)

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

35. La dimostrazione di Duchayla del Parallelogrammo delle Forze che abbiamo data nell'Art. 17, riposa sul principio della *trasmissibilità della forza;* si vegga l'Art. 11. Daremo un'altra dimostrazione che non dipende da questo principio; questa dimostrazione è quella di Poisson con una leggiera modificazione. Ammettiamo che se due forze eguali agiscono su di un elemento, la direzione della risultante bisega l'angolo tra le direzioni delle componenti. Inoltre, se P dinota la grandezza di ciascuna di due forze eguali, $2x$ l'angolo tra le loro direzioni, ed R la grandezza della risultante, allora R deve essere una certa funzione di P ed x; supponiamo

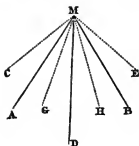
$$R = f(P, x).$$

In questa equazione, se mutiamo la nostra unità di forza, i valori numerici di P ed R muteranno; ma siccome l'equazione precedente deve essere vera, qualunque sia l'unità di forza che adottiamo, ne segue che la funzione $f(P, x)$ deve essere della forma $P\varphi(x)$. Quindi abbiamo

$$R = P\varphi(x).$$

Rappresenti M la posizione dell'elemento; siano MA, MB le direzioni delle forze eguali che agiscono su di esso; MD la direzione della risultante. Si tirino le quattro linee rette MC, MG, MH, ME, che fanno gli angoli CMA, GMA, HMB, EMB tutti eguali, e dinoti z la grandezza di ciascun angolo. Si supponga la forza P che agisce secondo MA risoluta in due forze eguali agenti secondo MC ed MG rispettivamente; si dinoti ciascuna di queste componenti con Q; allora

$$P = Q\varphi(z).$$

Similmente si risolva P che agisce secondo MB in due forze

ciascuna eguale a Q, agenti secondo ME ed MH rispettivamente. Così le due forze P sono rimpiazzate dalle quattro forze Q; e per conseguenza la risultante di queste quattro forze deve coincidere in grandezza e direzione con la risultante R delle due forze P.

Dinoti Q' la risultante delle due forze Q, agenti secondo MG ed MH; poichè $GMD = HMD = x - z$, abbiamo

$$Q' = Q\varphi(x - z),$$

ed MD è la direzione di Q'.

Similmente, la risultante Q'' delle altre forze Q agirà secondo MD; e poichè $CMD = EMD = x + z$, abbiamo

$$Q'' = Q\varphi(x + z).$$

Poichè Q' e Q'' agiscono entrambe secondo la linea retta MD, la loro risultante, che è anche la risultante delle quattro forze Q, deve essere eguale alla loro somma; quindi

$$R = Q' + Q''.$$

Ma abbiamo $\qquad R = P\varphi(x) = Q\varphi(z)\,\varphi(x).$

Quindi $\qquad \varphi(x)\,\varphi(z) = \varphi(x + z) + \varphi(x - z)$ ....(1).

Questa equazione ammette più di una soluzione; per esempio, se $\varphi(x) = 2\cos cx$, o se $\varphi(x) = e^{cx} + e^{-cx}$, in cui c è una costante qualunque, l'equazione è soddisfatta; però mostreremo che la sola soluzione ammissibile nella presente quistione è la seguente,

$$\varphi(x) = 2\cos x \text{ ....(2).}$$

Possiamo osservare che è inutile considerare un valore di x maggiore di $\frac{\pi}{2}$, poichè le direzioni di due forze agenti in un punto comprenderanno sempre un angolo minore di π; possiamo quindi ammettere come evidente che $\varphi(x)$ deve essere una quantità positiva.

Mostreremo prima che se $\varphi(x) = 2\cos x$ quando x ha un valore α, allora $\varphi(x)$ deve essere eguale a $2\cos x$ quando x ha il valore $\frac{\alpha}{2}$. In (1) si pongano x e z ciascuno eguale ad $\frac{\alpha}{2}$, sicchè $\varphi(x + z)$ diviene eguale a $2\cos\alpha$; così

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \varphi(0) + 2\cos\alpha \text{ .... (3).}$$

Ma la risultante di due forze eguali agenti nella stessa linea

retta è eguale a due volte ciascuna delle forze componenti; così $\varphi(0)=2$; quindi da (3)

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2(1+\cos\alpha)=4\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Quindi $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm 2\cos\frac{\alpha}{2}$; ma per supposizione $\frac{\alpha}{2}$ è minore di $\frac{\pi}{2}$, e $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ deve essere una quantità *positiva*; così

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Similmente se $\varphi(x)=2\cos x$ quando $x=\frac{\alpha}{2}$, allora $\varphi(x)=2\cos x$ quando $x=\frac{\alpha}{4}$; e così di seguito. Così conchiudiamo che se $\varphi(x)=2\cos x$ quando $x=\alpha$, allora $\varphi(x)=2\cos x$ quando $x=\frac{\alpha}{2^n}$, in cui n è un intero positivo qualunque.

Dimostreremo in secondo luogo che se $\varphi(x)=2\cos x$ quando $x=\beta$, e quando $x=\gamma$, e quando $x=\beta-\gamma$, allora $\varphi(x)=2\cos x$ quando $x=\beta+\gamma$. Da (1)

$$\begin{aligned}\varphi(\beta+\gamma)&=\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)-\varphi(\beta-\gamma)\\&=4\cos\beta\cos\gamma-2\cos(\beta-\gamma)\\&=2\cos(\beta+\gamma).\end{aligned}$$

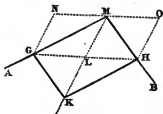
Così se (2) regge quando $x=\beta$, reggerà quando $x=2\beta$; ciò si ottiene supponendo $\gamma=\beta$. Quindi se (2) regge quando $x=\beta$ e quando $x=2\beta$, essa regge ancora quando $x=3\beta$; e così di seguito; cioè, se (2) regge quando $x=\beta$ reggerà quando $x=m\beta$. Così concludiamo che se (2) regge quando $x=\alpha$ reggerà quando $x=\frac{m\alpha}{2^n}$, in cui m ed n sono interi qualunque.

Ma poichè i numeri m ed n possono essere tanto grandi quanto ci piace, possiamo prenderli tali che l'espressione $\frac{m\alpha}{2^n}$ differisca tanto poco quanto ci piace da un qualunque valore assegnato di x. Possiamo quindi considerare (2) come completamente dimostrata se essa regge per un valore di x diverso da zero. Ma per l'Art. 16, essa regge quando $x=\frac{1}{3}\pi$, poichè allora si ha $\varphi(x)=1=2\cos\frac{1}{3}\pi$; quindi essa regge sempre. Quindi

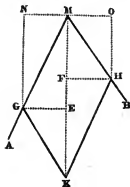
$$R=2P\cos x.$$

Se dunque le forze P sono rappresentate da linee rette con-

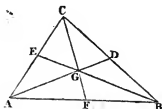
dotte dal loro punto d'applicazione, la risultante R sarà rappresentata da quella diagonale del parallelogrammo descritto su queste linee rette che passa pel punto d'applicazione.

In seguito, agiscano sull'elemento M due forze *diseguali* P e Q secondo le linee rette MA ed MB; si rappresentino le loro intensità con le linee rette MG ed MH prese sulle loro direzioni, e si completi il parallelogrammo $MGKH$.

In primo luogo si supponga AMB un angolo retto. Si tirino le due diagonali MK e GH, che s'incontrano in L; per G ed H si tirino GN ed HO parallele ad ML, che incontrano in N ed O la parallela a GH condotta per M. Allora

$$GL = LH = LM.$$

Quindi NL ed OL sono parallelogrammi equilateri, e quindi, per ciò che si è già dimostrato, la forza MG si può riguardare come la risultante di MN ed ML, e la forza MH come la risultante di MO ed ML. Quindi possiamo sostituire ad MG ed MH le forze MN, MO, e le due forze ML; MN ed MO, essendo eguali ed opposte, si distruggono scambievolmente, e rimangono le due forze ML, le quali insieme danno una forza rappresentata in grandezza e direzione da MK.

In secondo luogo, supponiamo che l'angolo AMB non sia retto. Per G ed H si tirino GE ed HF perpendicolari alla diagonale MK, e GN ed HO parallele a questa linea retta. Per M si conduca NMO ad angoli retti ad MK. Allora abbiamo $GE=HF$. Come abbiamo già dimostrato la forza MG si può rimpiazzare con MN ed ME, e la forza MH con MO ed MF. Poichè MN ed MO sono eguali ed opposte, esse si distruggeranno scambievolmente, e rimangono MF ed ME; siccome $MF=KE$, abbiamo MK per la risultante in grandezza e direzione di MG ed MH.

Quindi il *Parallelogrammo delle Forze* è completamente dimostrato.

36. Daremo ora alcune semplici proposizioni per servire di esempi ed illustrazioni ai principii di questo Capitolo.

I. ABC è un triangolo; D, E, F sono i punti medii dei lati BC, CA, AB rispettivamente: mostrare che le forze rappresentate dalle linee rette AD, BE, CF saranno in equilibrio.

È noto che le linee rette AD, BE, CF concorrono in un punto. Dinoti G questo punto. Le tre forze si può supporre che agiscano in G.

Poichè D è il punto medio di BC, il parallelogrammo descritto sopra AB ed AC come lati adiacenti avrà una diagonale nella direzione AD; quindi due volte AD rappresenterà la risultante di due forze rappresentate da AB ed AC. E viceversa la forza rappresentata da AD si può risolvere in due forze rappresentate dalla metà di AB e dalla metà di AC. Similmente la forza BE si può risolvere nella metà di BC e la metà di BA; e la forza CF si può risolvere nella metà di CA e la metà di CB.

Ma la forza metà di AB è eguale ed opposta alla forza metà di BA; e così di seguito. Così, finalmente, le forze AD, BE, CF sono in equilibrio.

II. Nella figura della proposizione precedente le forze rappresentate dalle linee rette GA, GB, GC saranno in equilibrio.

La risultante delle forze GB e GC agisce secondo GD. Quindi se non vi è equilibrio le tre forze GA, GB, GC hanno una risultante agente o da A verso D o da D verso A, cioè nella linea retta AD. Ma nello stesso modo si può dimostrare che se le forze GA, GB, GC non sono in equilibrio la loro risultante deve agire nella linea retta BE, ed anche nella linea retta CF. Ma è impossibile che la risultante agisca in tre linee rette differenti. Quindi le forze GA, GB, GC debbono essere in equilibrio.

Poichè, come si può dimostrare con la Geometria, $AD=3GD$, $BE=3GE$, e $CF=3GF$, le forze AD, BE, CF hanno tra loro *gli stessi rapporti* che le forze GD, GE, GF; sicchè la prima proposizione si può dedurre immediatamente dalla seconda.

III. Tre forze rispettivamente proporzionali ai lati di un triangolo agiscono nel piano del triangolo, perpendicolarmente ai suoi

lati e nei loro punti medii; dimostrare che se esse agiscono tutte verso l'interno o verso l'esterno esse saranno in equilibrio.

Le direzioni delle forze s'incontrano in un punto, cioè, nel centro del cerchio circoscritto al triangolo. E l'angolo tra le direzioni di due forze è supplemento dell'angolo tra i lati corrispondenti. Così ciascuna forza è proporzionale al seno dell'angolo tra le altre due. Quindi per l'Art. 19 le forze sono in equilibrio.

IV. Tre forze rispettivamente proporzionali ai lati di un triangolo agiscono nei suoi vertici secondo le perpendicolari abbassate da essi sui lati rispettivamente opposti: dimostrare che le forze saranno in equilibrio.

È noto che le perpendicolari concorrono in un punto. Quindi per la proposizione precedente le forze sono in equilibrio.

V. ABC è un triangolo; H, I, K sono punti nei lati BC, CA, AB rispettivamente tali che

$$\frac{BH}{HC} = \frac{CI}{IA} = \frac{AK}{KB}.$$

Dimostrare che se le forze rappresentate da AH, BI, CK agiscono in un punto esse saranno in equilibrio.

Siano D, E, F i punti medii dei lati; e si suppongano tirate AD, BE, e CF.

La forza AH si può risolvere nelle forze AD, DH; la forza BI nelle forze BE, EI; e la forza CK nelle forze CF, FK. Si vegga l'Art. 20.

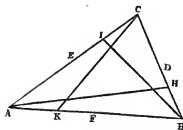
Le forze AD, BE, CF sono in equilibrio per la prima proposizione.

Ed abbiamo dall'ipotesi intorno ad H, I, K,

$$\frac{DH}{BC} = \frac{EI}{CA} = \frac{FK}{AB};$$

sicchè le forze DH, EI, FK sono proporzionali ai lati del triangolo ABC; quindi per l'Art. 21 esse sono in equilibrio se agiscono in un punto.

Quindi se le forze AH, BI, CK agiscono in un punto esse sono in equilibrio.

Le linee rette AH, BI, CK con le loro intersezioni formano un triangolo; e quindi per l'Art. 19 i lati di questo triangolo sono proporzionali alle forze. Laonde arriviamo con principii

meccanici al risultato geometrico seguente: i lati del triangolo formato dalle intersezioni di AH, BI, CK sono proporzionali ad AH, BI, CK rispettivamente.

VI. Supponiamo che tre forze P, Q, R agiscano in un punto O, e siano in equilibrio; si descriva una circonferenza col centro O, e con un raggio qualunque, che tagli le direzioni delle forze nei punti A, B, C rispettivamente: allora saranno P, Q, R rispettivamente proporzionali alle aree dei triangoli OBC, OCA, OAB.

Ciò segue immediatamente dall'Art. 19, poichè l'area di un triangolo è espressa dalla metà del prodotto di due lati pel seno dell'angolo compreso.

VII. Supponiamo che quattro forze P, Q, R, S agiscano in un punto O, e siano in equilibrio; si descriva una superficie sferica col centro O, e con un raggio qualunque, che tagli le direzioni delle forze nei punti A, B, C, D rispettivamente: allora saranno P, Q, R, S rispettivamente proporzionali ai volumi delle piramidi $OBCD$, $OCDA$, $ODAB$, $OABC$.

Si prenda O per origine di un sistema di assi rettangolari, siano x_1, y_1, z_1 le coordinate di A; x_2, y_2, z_2 le coordinate di B; e così di seguito. Allora per l'Art. 27,

$$Px_1 + Qx_2 + Rx_3 + Sx_4 = 0,$$
$$Py_1 + Qy_2 + Ry_3 + Sy_4 = 0,$$
$$Pz_1 + Qz_2 + Rz_3 + Sz_4 = 0.$$

Quindi, eliminando Q ed R, otterremo

$$P = S\frac{x_4(y_3z_2 - y_2z_3) + y_4(z_3x_2 - z_2x_3) + z_4(x_3y_2 - x_2y_3)}{x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + y_1(z_2x_3 - z_3x_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2)}.$$

Quindi, per mezzo dell'espressione del volume di una piramide data nelle opere sulla Geometria analitica a tre dimensioni, abbiamo

$$\frac{P}{S} = \frac{\text{volume della piramide } OBCD}{\text{volume della piramide } OABC}.$$

Similmente otteniamo il valore di $\frac{Q}{S}$ e di $\frac{R}{S}$.

ESEMPII.

1. Due forze P e Q hanno una risultante R che fa un angolo α con P; se P si accresce di R mentre Q rimane la stessa, dimostrare che la nuova risultante fa un angolo $\frac{\alpha}{2}$ con P.

2. Due forze nel rapporto di 2 a $\sqrt{3}-1$, sono inclinate tra loro sotto un angolo di 60°; quale deve essere la direzione e la grandezza di una terza forza che produce l'equilibrio?

Risultato. La forza richiesta deve stare alla prima delle forze date come $\sqrt{6}$ a 2; e la sua direzione prolungata fa un angolo di 15° con quella forza.

3. La risultante di due forze P e Q è eguale a $Q\sqrt{3}$, e fa un angolo di 30° con P; trovare P in termini di Q.

Risultato. O $P=Q$ o $P=2Q$; nel primo caso l'angolo tra P e Q è 60°, e nel secondo 120°.

4. Se D, E, F sono i punti medii dei lati del triangolo ABC ed O è un altro punto qualunque, dimostrare che il sistema delle forze rappresentate da OD, OE, OF è equivalente a quello rappresentato da OA, OB, OC.

5. La risultante di due forze è 10, una di esse è eguale ad 8, e la direzione dell'altra è inclinata alla risultante sotto un angolo di 36°. Trovare l'angolo fra le due forze.

Risultato. $\text{Sen}^{-1}\,\frac{5}{16}(10-2\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$.

6. La risultante di due forze P, Q, agenti sotto un angolo θ, è eguale a $(2m+1)\sqrt{(P^2+Q^2)}$; quando esse agiscono sotto un angolo $\frac{1}{2}\pi-\theta$, essa è eguale a $(2m-1)\sqrt{(P^2+Q^2)}$; dimostrare che $\tan\theta=\frac{m-1}{m+1}$.

7. Due forze F ed F' agenti secondo le diagonali di un parallelogrammo lo mantengono in equilibrio in una posizione tale che uno dei suoi lati è orizzontale, mostrare che

$$F\sec\alpha' = F'\sec\alpha = W\operatorname{cosec}(\alpha+\alpha'),$$

in cui W è il peso del parallelogrammo, ed α e α' sono gli angoli tra le sue diagonali ed il lato orizzontale.

8. Se un elemento è situato su di una sfera, ed è sollecitato da tre forze rappresentate in grandezza e direzione da tre corde perpendicolari tra di loro condotte per l'elemento, esso resterà in eqnilibrio.

9. Tre forze P, Q, R che agiscono su di un punto e lo mantengono in equilibrio sono rappresentate da linee rette condotte pel

punto. Se P è data in grandezza e direzione, e Q solamente in grandezza, trovare il luogo dell'estremità della retta che rappresenta la terza forza R.

Risultato. Una sfera.

10. Un circolo il di cui piano è verticale ha un centro di forza ripulsiva costante in una estremità del diametro orizzontale; trovare la posizione di equilibrio di un elemento nell'interno del cerchio, la forza ripulsiva essendo eguale al peso dell'elemento.

Risultato. La linea retta che congiunge l'elemento col centro del circolo fa un angolo di 60° con l'orizzonte.

11. Un elemento è posto su di una tavola levigata quadrata di lato a, alle distanze c_1, c_2, c_3, c_4 dagli angoli, e ad esso sono legate delle funi che passano sopra carrucole levigate messe negli angoli e sopportano i pesi P_1, P_2, P_3, P_4; dimostrare che se vi è equilibrio,

$$\left(\frac{P_1}{c_1}+\frac{P_2}{c_2}+\frac{P_3}{c_3}+\frac{P_4}{c_4}\right)^2 \frac{c_1^2}{a^2} = \left(\frac{P_2}{c_2}+\frac{P_3}{c_3}\right)^2 + \left(\frac{P_3}{c_3}+\frac{P_4}{c_4}\right)^2.$$

Mostrare ancora che

$$\left(\frac{P_1}{c_1}+\frac{P_2}{c_2}+\frac{P_3}{c_3}+\frac{P_4}{c_4}\right)\frac{c_1^2-c_3^2}{a^2} = 2\left(\frac{P_3}{c_3}-\frac{P_1}{c_1}\right).$$

12. Due piccoli anelli scorrono sull'arco di un circolo verticale levigato; una fune passa per i due anelli, e ad essa sono legati tre pesi eguali, uno a ciascuna estremità ed uno tra gli anelli; trovare la posizione degli anelli quando essi sono in equilibrio. Gli anelli si suppongono senza peso.

Risultato. Ciascuno degli anelli deve essere distante di 30° dal punto più alto del circolo.

13. Le estremità di una fune senza peso sono legate a due anelli pesanti eguali che scorrono sopra due verghe fisse levigate, nello stesso piano verticale ed egualmente inclinate alla verticale; nel punto medio della fune è legato un peso eguale a due volte il peso di ciascun anello; trovare la posizione di equilibrio e la tensione della fune.

Se il punto nel quale è legato il peso non è il punto medio della fune, mostrare che nella posizione di equilibrio le tensioni delle sue due porzioni saranno eguali.

14. Una fune leggiera con una estremità legata ad un punto fisso passa sopra una carrucola nella stessa linea orizzontale col punto fisso e sopporta un peso che pende liberamente dall'altra

sua estremità. Un anello pesante essendo legato alla fune in differenti luoghi tra il punto fisso e la carrucola, trovare la locale delle sue posizioni di equilibrio. Se il peso dell'anello è piccolo in paragone dell'altro peso, la locale sarà approssimativamente una parabola.

15. Se due forze che agiscono secondo due corde di un circolo sono inversamente proporzionali alle lunghezze delle corde, la loro risultante passerà per l'uno o per l'altro dei punti d'intersezione delle linee rette condotte per le estremità delle corde.

16. Un elemento è in equilibrio su di un'ellisse essendo sollecitato dalle forze λx^n, μy^n, parallele agli assi delle x e delle y rispettivamente; trovare la sua posizione di equilibrio. Spiegare il caso in cui $n=1$.

17. Un elemento è situato sulla superficie esterna di una sfera fissa levigata ed è sollecitato da un centro fisso di forza posto verticalmente al di sopra del centro della sfera, ad una distanza c da esso ed attraendo direttamente alla distanza. Dimostrare che l'elemento sarà in equilibrio in un punto qualunque della sfera se il peso dell'elemento eguaglia l'attrazione su di esso del centro fisso di forza ad una distanza c dal medesimo.

18. Un elemento è situato sulla superficie di un ellissoide nel centro del quale risiede una forza attrattiva: determinare la direzione nella quale l'elemento incomincerà a muoversi.

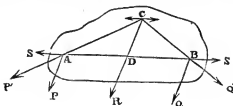
19. Trovare il punto sulla superficie $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=1$, in cui un elemento attratto da una forza all'origine resterà in equilibrio.

20. $ABCD$ è un quadrilatero inscritto in un cerchio, e delle forze inversamente proporzionali ad AB, BC, AD, DC agiscono secondo i lati nelle direzioni indicate dalle lettere: mostrare che la loro risultante agisce secondo la linea retta che congiunge l'intersezione delle diagonali con l'intersezione delle tangenti al circolo in B,D.

CAPITOLO III.

Risultante di due forze parallele. Coppie.

37. *Trovare la grandezza e la direzione della risultante di due forze parallele che agiscono sopra un corpo rigido.*

Siano P e Q le forze; A e B i loro punti di applicazione: agiscano P e Q nella *stessa* direzione, che fa l'angolo α con AB. L'effetto delle forze non sarà alterato se applichiamo due forze

eguali in grandezza ed agenti in direzioni opposte secondo la linea retta AB. Dinoti S ciascuna di queste forze, e supponiamo che una agisca in A e l'altra in B.

Allora P ed S che agiscono in A sono equivalenti ad una forza P' che agisce in una direzione AP' inclinata ad AP (Art. 17); e Q ed S che agiscono in B sono equivalenti ad una forza Q' che agisce in una direzione BQ' inclinata a BQ.

Si prolunghino $P'A$, $Q'B$ sino a che s'incontrino in C, e si tiri CD parallela ad AP, che incontri AB in D; si supponga C connesso invariabilmente con AB.

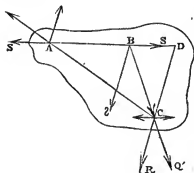
Si trasferiscano P' e Q' in C (Art. 11), e si risolvano secondo CD ed una linea retta parallela ad AB; le ultime parti saranno ciascuna eguale ad S ma agiranno in direzioni opposte, e la somma delle prime è $P+Q$. Quindi R, la risultante di P e Q, è eguale a $P+Q$ ed agisce parallelamente a P e Q nella linea retta CD. Determineremo ora il punto dove questa linea retta taglia AB.

I lati del triangolo ACD sono paralleli alle direzioni delle forze P, S, P'; quindi per l'Art. 19,

$$\frac{P}{S}=\frac{CD}{DA}, \text{ e similmente } \frac{S}{Q}=\frac{DB}{CD};$$

quindi $$\frac{P}{Q}=\frac{DB}{DA}=\frac{a-x}{x}, \text{ se } AB=a \text{ ed } AD=x;$$

quindi $$\frac{x}{a}=\frac{Q}{P+Q};$$

questo determina il punto D pel quale passa la direzione della risultante. Si osserverà che AB è divisa in D in segmenti che sono inversamente proporzionali alle forze in A e B rispettivamente.

Se la forza P agisce in una direzione *opposta* a quella di Q un simile procedimento ci condurrà ad

$$R=Q-P, \text{ ed } \frac{x}{a}=\frac{Q}{Q-P};$$

chè si possono dedurre dalle formole del caso precedente cambiando P in $-P$.

Si osserverà che AB prolungata è divisa in D in segmenti che sono inversamente proporzionali alle forze in A e B rispettivamente.

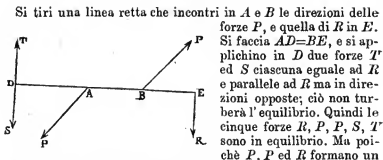
38. Il punto D possiede questa proprietà rimarchevole: che comunque P e Q girino intorno ai loro punti di applicazione A e B, le loro direzioni rimanendo parallele, il punto D determinato come sopra rimane fisso. Questo punto è chiamato perciò il *centro* delle forze parallele P e Q.

39. Se $P=Q$ nel secondo caso dell'Art. 37, allora $R=0$ ed $x=\infty$, risultato perfettamente illnsorio. Esso ci mostra che il metodo col quale abbiamo cercato di comporre due forze parallele eguali ed opposte cade in difetto. Infatti l'aggiunta delle due forze S dà ancora, in questo caso, due forze parallele eguali ed opposte nelle loro direzioni.

Un tale sistema di forze si chiama una *Coppia*.

Investigheremo le leggi della composizione e risoluzione delle coppie, poichè a queste ridurremo la composizione e risoluzione delle forze agenti comunque su di un corpo rigido.

40. Dall'Art. 39 potremmo congetturare che due forze eguali agenti in direzioni parallele ed opposte *non ammettono una sola risultante*, il che si può dimostrare come segue.

Supponiamo, se è possibile, che la sola forza R mantenga l'equilibrio con due forze, ciascuna dinotata da P, agenti in direzioni parallele ed opposte.

Si tiri una linea retta che incontri in A e B le direzioni delle forze P, e quella di R in E. Si faccia $AD=BE$, e si applichino in D due forze T ed S ciascuna eguale ad R e parallele ad R ma in direzioni opposte; ciò non turberà l'equilibrio. Quindi le cinque forze R, P, P, S, T sono in equilibrio. Ma poichè P, P ed R formano un sistema in equilibrio, sarà lo stesso per simmetria di P, P e T. Quindi se togliamo le ultime tre forze non turberemo l'equilibrio, e restano perciò R ed S che mantengono l'equilibrio. Ma ciò è evidentemente impossibile, poichè le forze agiscono nella stessa direzione. Quindi le due forze parallele P non possono essere equilibrate da una sola forza, e quindi non ammettono una sola risultante.

41. Una *coppia* consiste di due forze eguali che agiscono in direzioni parallele ed opposte.

Il *braccio* di una coppia è la distanza perpendicolare tra le direzioni delle sue forze.

Il *momento* di una coppia è il prodotto di ciascuna delle sue forze per la loro distanza perpendicolare.

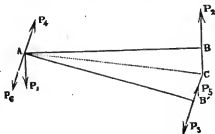
L'*asse* di una coppia è una linea retta perpendicolare al piano della coppia e proporzionale in lunghezza al momento.

Due coppie nello stesso piano possono differire rispetto alla direzione. Infatti supponiamo che il punto medio del braccio di una coppia sia fisso, e che il braccio si muova nella direzione secondo la quale le due forze della coppia lo spingono; vi sono due direzioni diverse in cui il braccio può girare. Si supponga tirata la perpendicolare al piano della coppia pel punto medio del suo braccio, in modo che ad un osservatore situato lungo questa linea retta con i piedi contro al piano, apparisca la rotazione che le forze imprimono al braccio aver luogo da *sinistra* a *dritta*; la perpendicolare così tirata si prenderà per l'*asse* della coppia.

Daremo ora tre proposizioni che mostrano come l'effetto di una coppia non è alterato quando si eseguono alcuni cambiamenti rispetto alla coppia. Si deve supporre in tutte queste proposizioni che un corpo rigido è in equilibrio sotto l'azione di alcune forze, includendo una coppia assegnata; e si dimostra che allora l'equilibrio non sarà turbato per i cambiamenti particolari rispetto alla coppia.

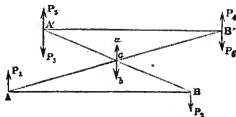
42. *L'effetto di una coppia non è alterato se il suo braccio gira per un angolo qualunque intorno una sua estremità nel piano della coppia.*

Sia il piano del foglio il piano della coppia, AB il braccio, ed AB' la sua nuova posizione; le forze P_1, P_2 sono eguali, ed agi-

scono sul braccio AB. In B' ed A siano applicate le forze eguali ed opposte P_3, P_5, P_4, P_6, ciascuna eguale a P_1 o P_2, ed agenti ad angoli retti sopra AB'; ciò non altererà l'azione di P_1 e P_2.

Supponiamo che BP_2, $B'P_3$ s'incontrino in C; si congiunga AC; AC evidentemente bisega l'angolo BAB'.

Ora P_2 e P_3 sono equivalenti ad una forza nella direzione CA, e P_1 e P_4, sono equivalenti ad una forza *eguale* nella direzione AC. Quindi P_1, P_2, P_3, P_4 sono in equilibrio tra loro; quindi le forze rimanenti P_5, P_6 agenti in B', A rispettivamente producono lo stesso effetto di P_2, P_1 agenti in B, A rispettivamente. Quindi la proposizione è vera.

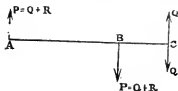
Possiamo ora girare il braccio della coppia per un angolo qualunque intorno a B'; e procedendo in questo modo possiamo trasferire la coppia in una posizione qualunque nel suo proprio piano.

43. *L'effetto di una coppia non è alterato se trasferiamo la coppia in un piano qualunque parallelo al proprio, il braccio restando parallelo a sè stesso.*

Sia AB il braccio, $A'B'$ la sua nuova posizione parallela ad

AB. Si congiungano AB', $A'B$ le quali si dividono scambievolmente per metà in G. In A', B' si applichino due forze eguali ed opposte ciascuna eguale a P_1 o P_2 e parallele ad esse; e siano queste forze P_3,P_4,P_5,P_6; ciò non altererà l'effetto della coppia.

Ma P_1 e P_4 sono equivalenti a $2P_1$ agente in G nella direzione Ga parallela alla direzione di P_1, e P_2 e P_3 sono equivalenti a $2P_1$ agente in G nella direzione opposta Gb.

Quindi P_1, P_2, P_3, P_4 sono in equilibrio tra loro; quindi le forze rimanenti P_5 e P_6 agenti in A' e B' rispettivamente producono lo stesso effetto di P_1 e P_2 agenti in A e B rispettivamente. Quindi la proposizione è vera.

44. *L'effetto di una coppia non è alterato se la rimpiazziamo con un'altra coppia di cui il momento è lo stesso; il piano rimanendo lo stesso ed i bracci essendo nella stessa linea retta ed avendo una estremità comune.*

Sia AB il braccio; siano P,P le forze, e si supponga $P=Q+R$; sia $AB=a$, e sia il nuovo braccio $AC=b$; in C si applichino due forze opposte ciascuna eguale a Q e parallele a P; ciò non altererà l'effetto della coppia.

Ora R in A e Q in C si equilibreranno con $Q+R$ in B,

se $\quad AB : BC :: Q : R,$ (Art. 37),

o pure se $\quad AB : AC :: Q : Q + R,$

cioè, se $\quad Q \cdot b = P \cdot a;$

rimane quindi la coppia Q, Q agente sul braccio AC. Quindi la coppia P, P agente su di AB si può rimpiazzare con la coppia Q, Q agente su di AC, se $Q \cdot b = P \cdot a$, cioè, se i loro momenti sono gli stessi.

45. Dai tre ultimi Articoli apparisce che, senza alterare l'effetto di una coppia, possiamo cambiarla in un'altra di eguale momento, e trasferirla in una posizione qualunque, o nel suo proprio piano o pure in un piano ad esso parallelo. La coppia deve rimanere invariata in quanto concerne la direzione della rotazione che le sue forze tenderebbero a dare al braccio, supponendo il suo punto medio fisso come nell'Art. 41. In altri termini, la linea retta che abbiamo chiamata l'asse, misurata come si è detto in quell'Articolo, deve sempre rimanere dalla *stessa parte* del piano della coppia.

46. Possiamo dedurre dall'Art. 44 che le coppie si possono misurare con i loro momenti. Vi siano due coppie, una in cui ciascuna forza $=P$, ed una in cui ciascuna forza $=Q$, i bracci delle coppie essendo *eguali*; queste coppie saranno nel rapporto di P a Q. Infatti supponiamo, per esempio, che P stia a Q come 3 a 5; allora ciascuna delle forze P si può dividere in 3 forze eguali e ciascuna delle forze Q in 5 di tali forze eguali. Allora la coppia di cui ciascuna forza è P si può considerare come la somma di 3 coppie eguali della stessa specie, e la coppia di cui ciascuna forza è Q come la somma di 5 di tali coppie eguali. Gli effetti delle coppie saranno perciò come 3 a 5. In seguito, supponiamo i bracci delle coppie *diseguali*, e dinotiamoli con p e q rispettivamente. La coppia che ha ciascuna delle sue forze $=Q$ ed il suo braccio $=q$ è equivalente ad una coppia che ha ciascuna delle sue forze $=\frac{Qq}{p}$ ed il suo braccio $=p$, per l'Art. 44. Le coppie sono perciò pel primo caso nel rapporto di P e $\frac{Qq}{p}$, cioè di Pp a Qq.

47. In quanto all'effetto di una coppia, possiamo osservare che, come si dimostra nella dinamica, se una coppia agisce su di un corpo rigido libero essa porrà il corpo in rotazione intorno ad un asse che passa per un certo punto nel corpo chiamato il suo centro di gravità, *ma non necessariamente perpendicolare al piano della coppia.*

48. *Trovare la risultante di un numero qualunque di coppie agenti su di un corpo, i piani delle coppie essendo paralleli tra loro.*

Primieramente, si suppongano tutte le coppie trasferite nello stesso piano (Art. 43); in seguito, siano esse trasferite in modo da avere i loro bracci nella stessa linea retta, ed una estremità comune (Art. 42); e finalmente, siano esse rimpiazzate da altre coppie aventi lo stesso braccio (Art. 44).

Così se P, Q, R, ... sono le forze, ed
a, b, c, ... i loro bracci,

le dovremo rimpiazzare con le seguenti forze (supponendo α il braccio comune),

$$P\cdot\frac{a}{\alpha},\ Q\cdot\frac{b}{\alpha},\ R\cdot\frac{c}{\alpha},\ \ldots\ldots\ \text{agenti col braccio } \alpha.$$

Quindi la loro risultante sarà una coppia di cui ciascuna forza eguaglia

$$P\cdot\frac{a}{\alpha}+Q\cdot\frac{b}{\alpha}+R\cdot\frac{c}{\alpha}+\ldots\ldots\ldots,$$

ed il braccio $=\alpha$,
o sia di cui il momento eguaglia

$$P\cdot a+Q\cdot b+R\cdot c+\ldots\ldots\ldots$$

Quindi il momento della coppia risultante è eguale alla somma dei momenti delle coppie primitive.

Se una delle coppie, come Q, Q, agisce in una direzione *opposta* alla coppia P, P, allora la forza in ciascuna estremità del braccio della coppia risultante sarà

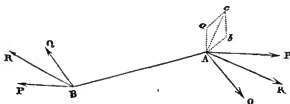
$$P\cdot\frac{a}{\alpha}-Q\cdot\frac{b}{\alpha}+R\cdot\frac{c}{\alpha}+\ldots\ldots\ldots,$$

ed il momento della coppia risultante sarà

$$P\cdot a-Q\cdot b+R\cdot c+\ldots\ldots\ldots,$$

o sia la somma algebrica dei momenti delle coppie primitive; i momenti di quelle coppie che tendono nella direzione opposta alla coppia P, P essendo considerati negativi.

49. *Trovare la risultante di due coppie che non agiscono nello stesso piano.*

I piani delle coppie s'interseghino secondo la linea retta AB,

che è perpendicolare al piano della figura, le coppie sieno riferite al braccio comune AB, e sieno le loro forze così alterate P e Q.

Nel piano della figura si tirino Aa, Ab ad angoli retti ai piani delle coppie P, P e Q, Q; ed eguali in lunghezza ai loro *assi*.

Sia R la risultante delle forze P e Q in A, agente nella direzione AR; e di P e Q in B agente nella direzione BR.

Poichè AP, AQ sono parallele a BP, BQ rispettivamente, AR è perciò parallela a BR.

Quindi le due coppie sono equivalenti alla sola coppia R, R agente sul braccio AB.

Si tiri Ac perpendicolare al piano di R, R, e nello stesso rapporto ad Aa, Ab come il momento della coppia R, R è a quelli

di P, P e Q, Q rispettivamente. Allora Ac è l'*asse* di R, R. Ora le tre linee rette Aa, Ac, Ab fanno tra loro gli stessi angoli che AP, AR, AQ fanno tra loro; inoltre esse sono nello stesso rapporto in cui sono $AB\cdot P$, $AB\cdot R$, $AB\cdot Q$; cioè in cui sono P, R, Q.

Ma R è la risultante di P e Q; quindi Ac è la diagonale del parallelogrammo sopra Aa, Ab (si vegga l'Art. 17).

Quindi se due linee rette, che hanno un'estremità comune, rappresentano gli assi di due coppie, quella diagonale del parallelogrammo descritto su queste linee rette come lati adiacenti che passa per la loro estremità comune rappresenta l'asse della coppia risultante.

50. *Trovare la grandezza e la posizione della coppia che è la risultante di tre coppie agenti in piani ad angoli retti tra di loro.*

Siano AB, AC, AD gli assi delle coppie date (si vegga la figura nell'Art. 24). Si completi il parallelogrammo CB, e si tiri la diagonale AE. Allora AE è l'asse della coppia che è la risultante delle due coppie di cui gli assi sono AB, AC. Si completi il parallelogrammo DE, e si tiri la diagonale AF. Allora AF è l'asse della coppia che è la risultante delle coppie di cui gli assi sono AE, AD, o sia di quelle di cui gli assi sono AB, AC, AD.

Ora $$AF^2 = AE^2 + AD^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2.$$

Sia G il momento della coppia risultante; L, M, N siano quelli delle coppie date;

quindi $$G^2 = L^2 + M^2 + N^2;$$

e se λ, μ, ν sono gli angoli che l'asse della risultante fa con quelli delle componenti,

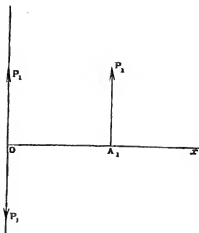
$$\cos\lambda = \frac{AB}{AF} = \frac{L}{G};\ \cos\mu = \frac{M}{G};\ \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

51. Quindi viceversa una coppia qualunque si può rimpiazzare con tre coppie agenti in piani perpendicolari tra loro; i loro momenti essendo $G\cos\lambda$, $G\cos\mu$, $G\cos\nu$; in cui G è il momento della coppia data, e λ, μ, ν sono gli angoli che il suo asse fa con gli assi delle tre coppie.

Così le *coppie* seguono, in quanto alla loro composizione e risoluzione, leggi simili a quelle che si applicano alle *forze*, l'*asse* della coppia corrispondendo alla *direzione* della forza ed il *momento* della coppia all'*intensità* della forza. Quindi per esempio, per l'Art. 29, la parte risoluta di una coppia risultante in una direzione qualunque è eguale alla somma delle parti risolute delle coppie componenti nella stessa direzione.

CAPITOLO IV.

Risultante delle forze in un piano. Condizioni di equilibrio. Momenti.

52. *Trovare la risultante di un numero qualunque di forze parallele agenti su di un corpo rigido in un piano.*

Dinotino $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ le forze. Si prenda un punto qualunque nel piano delle forze come origine e si tirino gli assi rettangolari Ox, Oy, l'ultimo parallelo alle forze. Sia A_1 il punto in cui Ox incontra la direzione di P_1, e sia $OA_1 = x_1$. Si applichino in O due forze ciascuna eguale e parallela a P_1, in direzioni opposte. Così la forza P_1 è rimpiazzata da P_1 in O secondo Oy, e da una coppia di cui il momento è $P_1 \cdot OA_1$, cioè $P_1 \cdot x_1$. Si trasformino in simil modo le altre forze usando una simile notazione, e l'intero sistema si ridurrà ad una forza $P_1+P_2+P_3+\ldots$ o ΣP secondo Oy, e ad una coppia $P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\ldots$ o ΣPx nel piano delle forze e tendendo a girare il corpo dall'asse delle x all'asse delle y.

53. *Trovare le condizioni di equilibrio di un sistema di forze parallele agenti su di un corpo solido in un piano.*

Un sistema di forze parallele si può ridurre ad una sola forza e ad una coppia. Se nessuna di queste svanisce l'equilibrio è impossibile, poichè una sola forza non può neutralizzare una coppia (Art. 40). Se svanisce solamente la forza l'equilibrio è impossibile, poichè vi rimane una coppia. Se svanisce solamente la coppia l'equilibrio è impossibile, poichè vi rimane una forza. Quindi, per l'equilibrio è necessario che svaniscano entrambe la forza e la coppia; cioè

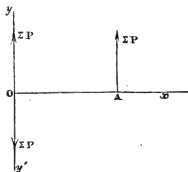
$$\Sigma P = 0 \quad \text{e} \quad \Sigma Px = 0.$$

54. Il prodotto di una forza per la perpendicolare condotta sulla sua direzione da un punto, si chiama il momento della forza rispetto a quel punto. Quindi le condizioni di equilibrio che abbiamo ora ottenuto si possono enunciare così:

Un sistema di forze parallele agenti su di un corpo rigido in un piano sarà in equilibrio se svanisce la somma delle forze, e svanisce ancora la somma dei momenti delle forze rispetto ad un' origine nel piano.

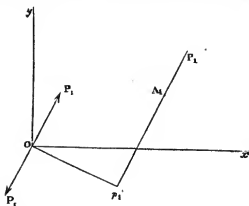
Viceversa, se le forze sono in equilibrio la loro somma deve svanire, del pari che la somma dei loro momenti rispetto ad un'origine qualunque nel piano.

La parola *somma* deve essere intesa *algebricamente*. Le forze che agiscono in una direzione essendo considerate *positive*, quelle che agiscono nella direzione opposta debbono essere considerate *negative*. Ancora i momenti essendo considerati *positivi* quando le coppie corrispondenti tendono a girare il corpo in *una* direzione, essi debbono essere considerati *negativi* quando le coppie corrispondenti tendono a girare il corpo nella direzione *opposta*.

55. Quando la somma delle forze svanisce nell'Art. 52, le forze si riducono ad una coppia. Quando ΣP non è zero, le forze si possono ridurre ad una sola risultante. Infatti se $\Sigma Px=0$, allora ΣP agente in O è *l'unica* risultante. Se ΣPx non è $=0$, si trasformi la coppia in una nella quale ciascuna delle forze è eguale a ΣP, e per conseguenza, per l'Art. 44, il braccio è $\frac{\Sigma Px}{\Sigma P}$. La forza ΣP agente in A e ΣP agente secondo Oy' formino questa coppia. L'ultima forza è distrutta dalla forza ΣP secondo Oy. Quindi l'unica risultante è ΣP agente in A, cioè, in un punto di cui la distanza da O è $\frac{\Sigma Px}{\Sigma P}$.

56. *Trovare la risultante di un numero qualunque di forze che agiscono su di un corpo rigido in un piano.*

Si riferisca il sistema a due assi rettangolari Ox, Oy nel piano delle forze.

Dinotino $P_1, P_2, P_3, \dots$ le forze; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ gli angoli che le loro direzioni fanno con l'asse delle x; siano x_1, y_1 le coordi-

nate del punto di applicazione di P_1; x_2, y_2 quelle del punto di applicazione di P_2, e così di seguito.

Sia A_1 il punto di applicazione di P_1. In O si suppongano applicate due forze in direzioni opposte ciascuna eguale e parallela a P_1. Si tiri Op_1 perpendicolare a $P_1 A_1$.

Quindi P_1 agente in A_1 è equivalente a P_1 agente in O e ad una coppia di cui Op_1 è il braccio e ciascuna forza è P_1, la quale tende a girare il corpo dall'asse delle x a quello delle y. Ora

$$Op_1 = x_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1.$$

Quindi il momento della coppia è

$$P_1 (x_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1).$$

Le altre forze si possono rimpiazzare similmente. Quindi il sistema è equivalente alle forze

$$P_1, P_2, P_3, \dots\dots \text{ agenti in } O,$$

in direzioni parallele a quelle delle forze primitive; ed alle coppie di cui i momenti sono

$$P_1 (x_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1),$$
$$P_2 (x_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2),$$
$$P_3 (x_3 \operatorname{sen} \alpha_3 - y_3 \cos \alpha_3),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

agenti nel piano delle forze. Si troverà che ciascuna delle espres-

sioni suddette dei momenti delle coppie è positiva o negativa, secondo che quella coppia tende a girare il corpo dall'asse delle x verso quello delle y, o nella direzione contraria.

Sia R la risultante delle forze che agiscono in O, a l'angolo che R fa con l'asse delle x, e G il momento della coppia risultante; allora (per l'Art. 22)

$$R \cos a = \Sigma P \cos \alpha; \quad R \operatorname{sen} a = \Sigma P \operatorname{sen} \alpha;$$

e (per l'Art. 48)

$$G = \Sigma P \, (x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha).$$

Se $P_1 \cos\alpha_1 = X_1$ e $P_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = Y_1$, ed una simile notazione si usa per le altre forze, le equazioni precedenti si possono scrivere

$$R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2; \quad \tan a = \frac{\Sigma Y}{\Sigma X};$$

e

$$G = \Sigma \, (Yx - Xy).$$

57. *Trovare le condizioni per l'equilibrio di un sistema di forze agenti su di un corpo rigido in un piano.*

Un sistema qualunque di forze agenti in un piano si può ridurre ad una sola forza R, e ad una coppia di cui il momento è G. Se nè R nè G svanisce l'equilibrio è impossibile, poichè una sola forza non può bilanciare una coppia. Se svanisce solamente R l'equilibrio è impossibile, poichè vi rimane una coppia G; se svanisce solamente G l'equilibrio è impossibile, poichè vi rimane una forza R. Quindi, per l'equilibrio dobbiamo avere $R=0$ e $G=0$. Inoltre $R=0$ richiede che sia $\Sigma X=0$ e $\Sigma Y=0$.

Poichè G è eguale alla somma dei momenti delle forze rispetto ad O, possiamo enunciare il risultato così: *Un sistema di forze agenti su di un corpo solido in un piano sarà in equilibrio se le somme delle parti risolute delle forze parallele a due assi rettangolari nel piano svaniscono, e svanisce ancora la somma dei momenti rispetto ad un'origine nel piano.*

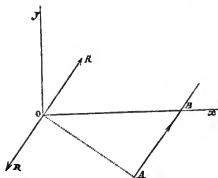
Viceversa, se le forze sono in equilibrio svanirà la somma delle parti risolute delle forze parallele ad una direzione qualunque, ed anche la somma dei momenti delle forze intorno ad un'origine qualunque.

58. *Se tre forze agenti in un piano mantengono un corpo rigido in equilibrio le loro direzioni o concorrono tutte in un punto o sono tutte parallele.*

Infatti supponiamo che due delle direzioni s'incontrino in un punto, e si prenda questo punto per origine; allora il momento

di ciascuna di queste due forze svanisce, e l'equazione $G=0$ richiede che svanisca il momento della terza forza, cioè, la terza forza deve passare anche per l'origine. Quindi, se due qnalunque delle forze s'incontrano, la terza deve passare pel loro punto d'intersezione, il che dimostra la proposizione. Questa proposizione si può anche stabilire senza riferirsi all'Art. 57, infatti se due delle forze s'incontrano in un punto, esse si possono snpporre agire entrambe in quel punto e possono essere rimpiazzate dalla loro risultante agente nello stesso punto; questa risultante e la terza forza debbono mantenere il corpo sul quale esse agiscono in eqnilibrio, e debbono perciò essere eguali ed opposte; cioè, la terza forza deve passare pel punto d'intersezione delle prime due.

59. Se $R=0$ nell'Art. 56, le forze si riducono ad una coppia; se R non è $=0$, le forze si possono ridurre ad una sola risultante.

Infatti se la coppia $G=0$, la forza risultante è R agente nell'origine. Se la coppia G non è $=0$, si trasformi in una che ha ciascuna delle sue forze $=R$ ed il suo braccio per conseguenza $=\frac{G}{R}$ (Art. 44). Si giri questa coppia nel suo proprio piano, finchè una delle sue forze agisca nell'origine esattamente opposta alla

forza R, che per ipotesi agisce nell'origine. Quindi queste forze si distruggono scambievolmente e rimane R agente all'estremità del braccio RA, in una direzione inclinata all'asse delle x sotto un angolo α, trovato dall'equazione $\tan \alpha=\frac{\Sigma Y}{\Sigma X}$ (Art. 56). Se questa direzione incontra l'asse delle x in B, abbiamo

$$OB = OA \operatorname{cosec} \alpha = \frac{G}{R} \cdot \frac{R}{\Sigma Y} = \frac{G}{\Sigma Y},$$

e l' equazione della linea d' azione dell' unica risultante è

$$y' = \frac{\Sigma Y}{\Sigma X}\left(x' - \frac{G}{\Sigma Y}\right);$$

o sia
$$x'\,\Sigma Y - y'\,\Sigma X = \Sigma\,(Yx - Xy),$$

x', y' essendo le coordinate variabili.

60. Il risultato dell' ultimo Articolo si può anche ottenere così. Supponiamo che le forze date abbiano una sola risultante agente nel punto (x', y'), ed equivalente alle componenti X' ed Y' parallele agli assi delle coordinate. Ne segue che le forze date formeranno, con $-X'$, $-Y'$ agenti nel punto (x', y'), un sistema in equilibrio. Quindi, per l'Art. 57,

$$\Sigma X - X' = 0, \quad \Sigma Y - Y' = 0, \quad G - Y'x' + X'y' = 0.$$

Di queste tre equazioni la prima determina X', la seconda Y', e la terza dà una relazione tra x' ed y', che è in fatti l' equazione della linea secondo la quale agisce la risultante ed in un punto qualunque della quale essa si può supporre che agisca. Se ΣX e ΣY svaniscono entrambe, è impossibile trovare valori di x' ed y' che soddisfino all'ultima delle tre equazioni, finchè G non svanisce; ciò mostra che se le forze si riducono ad una coppia, è impossibile di trovare una sola forza equivalente ad esse.

61. Nell' Art. 56, abbiamo pel momento della forza P_1 rispetto all' origine l' espressione

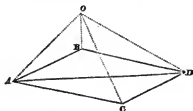
$$P_1\,(x_1 \operatorname{sen}\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1),$$

e questo si può esprimere con

$$Y_1\,x_1 - X_1\,y_1.$$

Essendo X_1 ed Y_1 le componenti rettangolari di P_1, vediamo paragonando le due espressioni che il momento di una forza rispetto ad un'origine qualunque è eguale alla somma algebrica dei momenti delle sue componenti rettangolari rispetto alla stessa origine. (Si vegga l' Art. 54). Vi sono molti di questi teoremi relativi ai momenti, e la dimostrazione di alcuni tra essi è facilitata dall'osservare che secondo la definizione del momento, esso si può rappresentare geometricamente col doppio dell' area del triangolo che ha per base la linea retta che rappresenta la forza e per vertice il punto rispetto al quale si prendono i momenti. Per esempio, possiamo dimostrare il teorema che abbiamo già dedotto.

62. *La somma algebrica dei momenti di due forze componenti rispetto ad un punto qualunque nel piano che contiene le due forze è eguale al momento della loro risultante.*

Rappresentino AB, AC due forze componenti; si completi il parallelogrammo e si tiri la diagonale AD che rappresenta la forza risultante.

(1) Cada il punto O, rispetto al quale si debbono prendere i momenti, *fuori* dell'angolo BAC e di quello che gli è verticalmente opposto. Si congiungano OA, OB, OC, OD.

Il triangolo OAC che ha per base AC e per altezza la perpendicolare da O su di AC è equivalente ad un triangolo che ha per base AC e per altezza la perpendicolare da B su di AC, insieme con un triangolo che ha per base BD e per altezza la perpendicolare da O su di BD. Questo è chiaro poichè BD è eguale e parallela ad AC, e la perpendicolare da O su di AC è eguale alla perpendicolare da O su di BD insieme con la perpendicolare da B su di AC. Quindi abbiamo

$$\Delta AOC = \Delta BOD + \Delta ACD.$$

Quindi, aggiungendo il triangolo AOB, abbiamo

$$\Delta AOC + \Delta AOB = \Delta BOD + \Delta ABD + \Delta AOB = \Delta AOD;$$

cioè, il momento di AC + il momento di AB = al momento di AD.

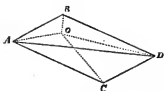
(2) Cada O *dentro* l'angolo BAC o nell'angolo verticalmente opposto.

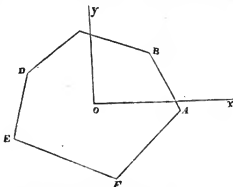
$$\Delta AOC = \Delta ABD - \Delta BOD$$
$$= \Delta AOB + \Delta AOD.$$

Quindi

$$\Delta AOD = \Delta AOC - \Delta AOB;$$

cioè, il momento di AD = al momento di AC — il momento di AB. Siccome i momenti di AC ed AB intorno ad O sono ora di caratteri *opposti*, il momento della risultante è sempre eguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti.

La proposizione si può anche dimostrare prontamente nel caso in cui le due forze componenti sono *parallele*; si vegga l'Art. 37.

63. *Più forze sono rappresentate in grandezza e posizione dai lati di un poligono piano presi in ordine; trovare la risultante.*

Rappresentino i lati della figura $ABCDEF$ le forze in grandezza e posizione; la prima forza essendo supposta agire nella

linea retta AB da A verso B, la seconda nella linea retta BC da B verso C, e così di seguito.

Come nell' Art. 56, le forze possono essere rimpiazzate da una forza risultante in un'origine arbitraria O e da una coppia. La prima è composta da tutte le forze AB, BC, ... trasportate parallelamente a loro stesse in O; la risultante per conseguenza svanisce per l'Art. 21.

Il momento della coppia risultante è la somma dei momenti delle coppie componenti, ed è perciò rappresentato dal doppio del triangolo AOB + il doppio del triangolo BOC + ... ; cioè, dal *doppio dell' area del poligono*. Quindi le forze si riducono ad una coppia risultante misurata dal doppio dell'area del poligono.

Possiamo osservare che la somma algebrica dei momenti delle due forze che formano una coppia è la stessa qualunque sia il punto rispetto al quale si prende; essa è in fatti eguale al *momento della coppia*.

64. Se si vuole la somma dei momenti delle forze $P_1, P_2, P_3, \ldots$ rispetto ad un punto di cui le coordinate sono h, k invece dell'origine, dobbiamo nell'espressione di G, nell'Art. 56, porre $x_1 - h$, $x_2 - h, \ldots$ per $x_1, x_2, \ldots$ rispettivamente, ed $y_1 - k$, $y_2 - k, \ldots$ per y_1, $y_2, \ldots$ rispettivamente. Quindi, dinotando il risultato con G_1, abbiamo

$$\begin{aligned} G_1 &= \Sigma \{ Y(x-h) - X(y-k) \} \\ &= k\Sigma X - h\Sigma Y + \Sigma(Yx - Xy) \\ &= k\Sigma X - h\Sigma Y + G. \end{aligned}$$

Quindi il valore di G_1 dipende in generale dalla posizione del punto rispetto al quale prendiamo i momenti. Se, però,

$$k \Sigma X - h \Sigma Y = \text{ad una costante},$$

cioè, se il punto (h, k) si muove lungo una linea retta qualunque parallela alla direzione della forza risultante R, allora G_1 rimane invariato.

Se vi sono tre punti diversi rispetto ai quali la somma dei momenti svanisce, abbiamo tre equazioni

$$k_1 \Sigma X - h_1 \Sigma Y + G = 0,$$
$$k_2 \Sigma X - h_2 \Sigma Y + G = 0,$$
$$k_3 \Sigma X - h_3 \Sigma Y + G = 0.$$

Quindi deduciamo

$$(k_1 - k_2) \Sigma X = (h_1 - h_2) \Sigma Y,$$
$$(k_2 - k_3) \Sigma X = (h_2 - h_3) \Sigma Y.$$

A meno che il punto (h_1, k_1), il punto (h_2, k_2), ed il punto (h_3, k_3) non siano per dritto, è impossibile che

$$\frac{k_1 - k_2}{h_1 - h_2} = \frac{k_2 - k_3}{h_2 - h_3};$$

dobbiamo quindi avere

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad G = 0.$$

Quindi se la somma dei momenti di un sistema di forze in un piano svanisce rispetto a tre punti nel piano non in linea retta, quel sistema è in equilibrio.

Quando un sistema di forze in un piano si può ridurre ad una sola risultante, abbiamo trovato nell'Art. 59 che l'equazione della direzione della risultante è

$$x' \Sigma Y - y' \Sigma X = \Sigma (Yx - Xy).$$

Questa si può scrivere

$$\Sigma \{ Y(x' - x) - X(y' - y) \} = 0.$$

Così l'equazione della direzione della risultante determina infatti il luogo dei punti per i quali la somma *algebrica* dei momenti delle forze è zero.

65. Finora abbiamo supposto i nostri assi rettangolari. Se essi sono obliqui ed inclinati sotto un angolo ω, possiamo mostrare,

come nell'Art. 56, che un sistema di forze in un piano si può ridurre a ΣX secondo l'asse delle x, ΣY secondo l'asse delle y, e ad una coppia di cui il momento è sen $\omega\,\Sigma(Yx-Xy)$. L'ultima parte si otterrà facilmente, poichè il momento della forza P_1 è equivalente alla somma algebrica dei momenti delle sue componenti X_1 ed Y_1; e la perpendicolare dall'origine sulla prima è y_1 sen ω, e sulla seconda x_1 sen ω.

Le condizioni per l'equilibrio sono, come sopra,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma (Yx - Xy) = 0.$$

Gli Esempii seguenti si possono risolvere per mezzo dei principii dati negli Articoli precedenti. Quando nella quistione entrano diversi corpi rigidi, le equazioni dell'Art. 57 debbono reggere rispetto a *ciascuno*, affinchè vi possa essere equilibrio. Nei casi in cui solamente *tre* forze agiscono sopra un corpo, è spesso conveniente di usare la proposizione dell'Art. 58. Siccome per l'Art. 57 i momenti delle forze rispetto ad un'origine *qualunque* debbono svanire, possiamo, se ci piace, prendere diverse origini e formare le equazioni corrispondenti per ciascuna. Si vegga l'Art. 64.

In alcuni degli Esempii anticipiamo i risultati dei Capitoli seguenti in quanto supponiamo che il peso di ciascun corpo agisca in un punto definito e conosciuto, che è il centro di gravità del corpo. Quando due corpi sono in contatto si ammette che qualunque forza l'uno eserciti sull'altro quest'ultimo eserciti una forza eguale ed opposta sul primo; se i corpi sono levigati questa forza agisce nella direzione della normale comune alle superficie nel punto di contatto.

Nel cercare di risolvere i problemi lo studente troverà conveniente quando il sistema contiene più di un corpo di limitare la sua attenzione ad uno per volta di quei corpi che sono capaci di movimento, e di prendere accuratamente in considerazione *tutte* le forze che agiscono su quel corpo. Quando i corpi sono a contatto si dovrà adoperare una lettera per dinotare la forza scambievole fra di essi, e la grandezza di questa forza si deve trovare per mezzo delle equazioni di equilibrio del corpo o dei corpi che sono capaci di movimento. E quando due dei corpi sono congiunti da una fune si dovrà adoperare una lettera per dinotare la tensione della fune, e la grandezza della tensione si deve trovare dalle condizioni di equilibrio del corpo o dei corpi che sono capaci di movimento. I principianti cadono spesso in errore *supponendo* dei valori inesatti per le tensioni delle funi e per le azioni scambievoli tra i corpi a contatto, invece di determinare i valori esatti dalle equazioni di equilibrio.

Daremo qui gli enunciati di due proposizioni (di facile dimostrazione) rispetto a forze agenti in un piano, che danno importanti risultati.

I. Più forze agiscono nei punti medii dei lati di un poligono rigido nel piano del poligono; le forze agiscono ad angoli retti sui lati, e sono in grandezza rispettivamente proporzionali ai lati: le forze saranno in equilibrio se esse agiscono tutte verso dentro o verso fuori.

II. Delle verghe rigide senza peso sono congiunte insieme alle loro estremità da gangheri levigati, in modo da formare un poligono piano. Delle forze agiscono nei punti medii dei lati del poligono nel piano del poligono; le forze agiscono ad angoli retti sui lati, e sono in grandezza rispettivamente proporzionali ai lati; se le forze agiscono tutte verso dentro o verso fuori, nel qual caso vi è equilibrio, si potrà circoscrivere un cerchio al poligono.

ESEMPII.

1. $ABCD$ è un quadrilatero ed è sollecitato da forze rappresentate in grandezza e direzione da AB, AD, CB, CD; mostrare che la risultante coincide in direzione con la linea retta che congiunge i punti medii delle diagonali AC, BD, ed è rappresentata in grandezza da quattro volte questa linea retta.

2. Delle forze con intensità proporzionali ai lati di un triangolo isoscele agiscono secondo i lati del triangolo, quelle che agiscono secondo i lati eguali tendendo dal vertice; trovare la grandezza e la posizione della loro risultante.

Risultato. La risultante richiesta è rappresentata da una linea retta che passa pel punto medio della base del triangolo, è parallela ad uno dei lati, ed è in lunghezza il doppio di quel lato.

3. L'estremità superiore di una verga pesante uniforme poggia contro un muro verticale levigato; un capo di una fune è legato all'estremità inferiore della verga e l'altro capo della fune è legato al muro; essendo data la posizione della verga, trovare il punto del muro al quale deve essere legata la fune, affinchè la verga sia in equilibrio.

4. Una verga pesante uniforme è situata a traverso di un cancello orizzontale levigato, e poggia con una estremità contro un muro verticale levigato, di cui la distanza dal cancello è $\frac{1}{16}$ della lunghezza della verga; trovare la posizione di equilibrio.

Risultato. La verga fa un angolo di 60° con l'orizzonte.

5. ABC è una lamina triangolare; AD, BE, CF sono le perpendicolari sui lati, e le forze rappresentate dalle linee rette BD, CD, CE, AE, AF, BF sono applicate alla lamina; mostrare che la loro risultante passerà pel centro del cerchio circoscritto al triangolo.

6. AB, AC sono due travi eguali connesse da un ganghero in A, e da una fune che congiunge le estremità B e C: AB è fissa verticalmente ed una sfera di dato peso e raggio è sostenuta tra le due travi: trovare la pressione della sfera su ciascuna trave, e la tensione della fune.

7. Una lamina ellittica è sollecitata nelle estremità di una coppia di diametri coniugati da forze nel suo proprio piano tendendo verso fuori, e normali al suo contorno: mostrare che vi sarà equilibrio se la forza nell'estremità di ciascun diametro è proporzionale al diametro coniugato.

8. Una sfera pesante pende da una caviglia per mezzo di una fune di lunghezza eguale al raggio, e poggia contro un'altra caviglia verticalmente al di sotto della prima, la distanza tra le due essendo eguale al diametro. Trovare la tensione della fune e la pressione sulla caviglia inferiore.

Risultati. La tensione è eguale al peso della sfera e la pressione alla metà del peso della sfera.

9. Due verghe eguali senza peso sono connesse nei loro punti medii da un perno che permette libero movimento in un piano verticale; esse poggiano sopra un piano orizzontale, e le loro estremità superiori sono connesse da un filo che porta un peso. Mostrare che il peso resterà alla metà della distanza tra il perno e la linea orizzontale che congiunge le estremità superiori delle verghe.

10. Due dischi circolari eguali con orli levigati, situati sulle loro facce spianate nell'angolo tra due piani verticali levigati inclinati sotto un dato angolo, si toccano scambievolmente nella linea retta che biseca l'angolo. Trovare il raggio del minimo disco che si può premere contro di loro senza che essi si separino.

11. Una tavola semicircolare spianata col suo piano verticale e l'orlo curvilineo in sopra poggia sopra un piano orizzontale levigato, ed è premuta in due punti dati della sua circonferenza da due travi che scorrono in tubi verticali levigati; trovare il rapporto tra i pesi delle travi affinchè la tavola sia in equilibrio.

12. Due cilindri levigati di raggi eguali vanno esattamente tra due muri verticali paralleli, e poggiano sopra un piano orizzontale levigato senza premere contro i muri; se si pone un terzo cilindro al di sopra di essi, trovare la pressione che ne risulta contro ciascuno dei muri.

13. Un anello circolare levigato poggia su due caviglie non nello stesso piano orizzontale; trovare la pressione sopra ciascuna caviglia.

14. Due sfere sono sostenute da funi legate ad un dato punto, e poggiano l'una contro l'altra; trovare le tensioni delle funi.

15. Due sfere eguali levigate, congiunte da una fune, sono collocate sulla superficie di un cilindro, la fune essendo così corta da non toccare il cilindro; determinare la posizione di equilibrio e la tensione della fune.

16. Un poligono regolare pesante è attaccato ad un muro verticale levigato per mezzo di una fune che è legata al punto medio di uno dei suoi lati; il piano del poligono è verticale e perpendicolare al muro, ed una delle estremità del lato al quale è legata la fune poggia contro il muro; mostrare che qualunque sia la lunghezza della fune quando il poligono è in equilibrio, la tensione della fune e la pressione sul muro sono costanti.

17. Una verga rettilinea senza peso è situata tra due caviglie, e le forze P e Q agiscono nelle sue estremità in direzioni parallele inclinate alla verga; si cercano le condizioni nelle quali la verga sarà in equilibrio e le pressioni sulle caviglie.

18. Le forze P, Q, R, S agiscono secondo i lati di un rettangolo; trovare la direzione della forza risultante.

19. Due pesi P, P sono attaccati alle estremità di due funi che passano sulla stessa caviglia levigata ed hanno le loro altre estremità legate alle estremità di una trave AB, il peso della quale è W; mostrare che l'inclinazione della trave all'orizzonte è $=\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{a+b}\tan\alpha\right)$; a, b essendo le distanze del centro di gravità della trave dalle sue estremità, e $\operatorname{sen}\alpha=\frac{W}{2P}$.

20. Un quadrato è situato col suo piano verticale tra due piccole caviglie che sono nella stessa linea orizzontale; mostrare che esso sarà in equilibrio quando l'inclinazione di uno dei suoi orli all'orizzonte è $=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{a^2-c^2}{c^2}$, $2a$ essendo la lunghezza di un lato del quadrato, e c la distanza tra le caviglie. Mostrare

che l'equilibrio non sarà alterato dall'applicazione di una forza qualunque che biseca la linea retta che congiunge le caviglie e passa per il punto più basso del quadrato.

21. Un capo di una fune è fisso all'estremità di una verga uniforme levigata, e l'altro ad un anello senza peso che passa sulla verga, e la fune è sospesa sopra una caviglia levigata. Determinare la minima lunghezza della fune per la quale l'equilibrio è possibile, e mostrare che l'inclinazione della verga alla verticale non può essere minore di 45°.

22. Una fune lunga 9 piedi ha un capo legato all'estremità di una verga pesante uniforme levigata e lunga due piedi, ed all'altro capo porta un anello senza peso che scorre sulla verga. La verga è sospesa per mezzo della corda da una caviglia levigata; mostrare che se θ è l'angolo che la verga fa con l'orizzonte, allora

$$\tan\theta = 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}}.$$

23. Un quadrato poggia col suo piano perpendicolare ad un muro levigato, un angolo essendo attaccato ad un punto nel muro per mezzo di una fune di cui la lunghezza è eguale ad un lato del quadrato; mostrare che le distanze di tre dei suoi vertici dal muro sono come 1, 3, e 4.

24. Un'estremità di una trave, di cui il peso è W, è posta sopra un piano orizzontale levigato; l'altra estremità, alla quale è legata una fune, poggia contro un altro piano levigato inclinato all'orizzonte sotto un angolo α; la fune passando sopra una carrucola alla sommità del piano inclinato pende verticalmente, sopportando un peso P. Mostrare che la trave sarà in equilibrio in tutte le posizioni se ha luogo una certa relazione fra P, W, ed α.

25. Se un peso pende da una estremità di una verga mobile intorno all'altra estremità A, che rimane fissa, ed una fune di data lunghezza è legata ad un punto qualunque B della verga, ed anche ad un punto fisso C al di sopra di A, e nella stessa linea verticale con esso, allora la tensione della fune varia inversamente come la distanza AB.

26. Un'estremità di una trave uniforme è situata sul suolo contro un ostacolo fisso, ed all'altra estremità è legata una fune che va in direzione orizzontale ad un punto fisso nella stessa linea verticale con l'ostacolo, e passando liberamente su di esso è tenuta in tensione da un peso W sospeso alla sua estremità, la trave essendo così tenuta in equilibrio sotto l'inclinazione di 45° all'orizzonte. Mostrare che se la fune fosse legata al centro in-

vece che all'estremo della trave, e passasse sullo stesso punto fisso, un peso $= \sqrt{2W}$ terrebbe la trave nella stessa posizione.

27. Due travi eguali AB, AC connesse da un ganghero in A sono situate in un piano verticale poggiando con le loro estremità B, C sopra un piano orizzontale; s'impedisce la loro caduta per mezzo di funi che congiungono B e C con i punti medii dei lati opposti; mostrare che il rapporto della tensione di ciascuna fune al peso di ciascuna trave

$$= \frac{1}{8}\sqrt{(8\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta)},$$

θ essendo l'inclinazione di ciascuna trave all'orizzonte.

28. Un capo di una fune è attaccato ad una trave nel punto B, e l'altro capo è legato al punto più alto A di una sfera fissa di raggio r. Se i punti di contatto della trave e della fune trisecano il quadrante AC, mostrare che la distanza tra B ed il centro di gravità della trave deve essere $2r(2-\sqrt{3})$.

29. Una verga pesante può girare liberamente intorno ad un ganghero fisso in una estremità, e porta un anello pesante che è attaccato ad un punto fisso nello stesso piano orizzontale col ganghero per mezzo di una fune di lunghezza eguale alla distanza tra il punto ed il ganghero. Trovare la posizione in cui la verga sarà in equilibrio.

30. Due travi pesanti eguali di sufficiente lunghezza, e connesse da un ganghero, sono sostenute da due caviglie levigate nella stessa linea orizzontale; una sfera è situata tra loro, determinare la posizione di equilibrio.

31. Le forze P, Q, R agiscono secondo i lati BC, CA, AB di un triangolo, e la loro risultante passa per i centri dei cerchi l'uno iscritto e l'altro circoscritto al triangolo; mostrare che

$$P : Q : R :: \cos B - \cos C : \cos C - \cos A : \cos A - \cos B.$$

32. Trovare la posizione di equilibrio di una trave uniforme che in un piano verticale preme con una estremità contro un muro verticale, e l'altra estremità è sostenuta dall'arco convesso di una parabola verticale col vertice nel piede del muro e l'asse orizzontale.

33. Una trave uniforme PQ data di peso e di lunghezza resta a contatto con un circolo verticale fisso di cui il diametro verticale è AB, in modo tale che le funi AP, BQ attaccate alla trave ed al circolo sono tangenti al circolo nei punti A e B. Trovare

le tensioni delle funi, e mostrare che le condizioni del problema richiedono che l'inclinazione della trave alla verticale sia minore di $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

34. Mostrare che nessuna verga uniforme può posare in parte dentro ed in parte fuori di una coppa emisferica fissa levigata sotto un'inclinazione all'orizzonte maggiore di $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

35. I lati di un poligono piano rigido sono sollecitati da forze ad angoli retti su i lati e proporzionali ad essi in grandezza, tutte le forze agendo nel piano del poligono, ed essendo dirette all'indentro; inoltre i lati presi nello stesso ordine sono divisi dai punti di applicazione nel rapporto costante di p a q; mostrare che il sistema delle forze è equivalente ad una coppia di cui il momento è

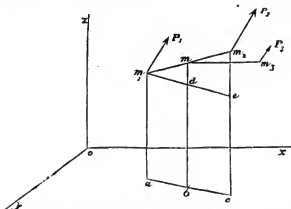
$$\frac{\mu(p-q)}{2(p+q)}\Sigma a^2,$$

dove μa rappresenta la forza applicata ad ogni lato a del poligono.

CAPITOLO V.

Forze in piani diversi.

66. *Trovare la grandezza e la direzione della risultante di un numero qualunque di forze parallele agenti su di un corpo rigido, e determinare il centro delle forze parallele.*

Siano riferiti i punti di applicazione delle forze ad un sistema

di assi coordinati rettangolari. Siano $m_1, m_2, ..,$ i punti di applicazione; siano x_1, y_1, z_1, le coordinate del primo punto, x_2, y_2, z_2, quelle del secondo, e così di seguito; siano $P_1, P_2, ...$ le forze che agiscono in questi punti, essendo considerate positive quelle che agiscono nella direzione di P_1, e negative quelle che agiscono nella direzione opposta.

Si congiunga $m_1 m_2$; e si prenda il punto m sopra $m_1 m_2$ in modo che

$$m_1 m = \frac{P_2}{P_1 + P_2} \cdot m_1 m_2;$$

allora la risultante di P_1 e P_2 è $P_1 + P_2$, ed agisce per m parallelamente a P_1 (Art. 37).

Si tirino $m_1 a$, mb, $m_2 c$ perpendicolari al piano delle (x, y), che incontrino quel piano in a, b, c; si tiri $m_1 de$ parallela ad abc che incontri mb in d ed $m_2 c$ in e. Allora, per i triangoli simili,

$$\frac{m_1 m}{m_1 m_2} = \frac{md}{m_2 e} = \frac{mb - z_1}{z_2 - z_1},$$

quindi $$mb - z_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}(z_2 - z_1);$$

quindi $$mb = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2}.$$

Questa dà l'ordinata parallela all'asse delle z del punto di applicazione della risultante di P_1 e P_2.

Allora supponendo P_1 e P_2 rimpiazzate da P_1+P_2 agente in m, la risultante di P_1+P_2 e P_3 è $P_1+P_2+P_3$, e l'ordinata del suo punto di applicazione

$$= \frac{(P_1 + P_2) mb + P_3 z_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3}{P_1 + P_2 + P_3};$$

e questo procedimento si può estendere ad un numero qualunque di forze parallele. Dinoti R la forza risultante e z' l'ordinata del suo punto di applicazione; allora

$$R = \Sigma P, \quad z' = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Similmente, se x', y' sono le altre coordinate del punto di applicazione della risultante,

$$x' = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}; \quad y' = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}.$$

I valori di x',y',z' sono indipendenti dagli angoli che le direzioni delle forze fanno con gli assi. Quindi se queste direzioni girano intorno ai punti di applicazione delle forze, conservando il loro parallelismo, il punto di applicazione della risultante non si cambierà. Per questa ragione questo punto si chiama il *centro delle forze parallele*.

67. Il momento di una forza rispetto ad un piano è il prodotto della forza per la distanza perpendicolare del suo punto di applicazione dal piano.

In conseguenza di questa definizione, le equazioni per determinare la posizione del centro delle forze parallele mostrano che *la somma dei momenti di un numero qualunque di forze parallele rispetto ad un piano qualunque è eguale al momento della loro risultante.*

68. Se le forze parallele agiscono tutte nella *stessa* direzione l'espressione ΣP non può svanire; quindi i valori delle coordi-

nate del *centro delle forze parallele* trovati nell'Art. 66 non possono diventare infiniti o indeterminati, e siamo certi che il centro esiste. Ma se alcune delle forze sono positive ed altre negative, ΣP *può* svanire, ed i risultati dell'Art. 66 diventare così illusorii. In questo caso, poichè la somma delle forze *positive* è eguale alla somma delle forze *negative*, la risultante delle prime sarà eguale alla risultante delle seconde. Quindi la risultante dell'intero sistema di forze è una *coppia*, a meno che la risultante delle forze positive non si trovi giacere nella stessa linea retta con la risultante delle forze negative.

Daremo un altro metodo per ridurre un sistema di forze parallele.

69. *Trovare la risultante di un sistema di forze parallele che agiscono su di un corpo rigido.*

Dinotino P_1, P_2,... le forze. Si prenda l'asse delle z parallelo alle forze. Il piano delle (x,y) incontri la direzione di P_1 in M_1, e si suppongano x_1, y_1 le coordinate di questo punto.

Si tiri M_1N_1 perpendicolare all'asse delle x e che lo incontri in N_1. Nell'origine O, ed anche in N_1, si applichino due forze ciascuna eguale e parallela a P_1 ed in direzioni opposte. Quindi la forza P_1 in M_1 è equivalente al seguente sistema,

(1) P_1 in O;

(2) una coppia formata da P_1 in M_1 e P_1 in N_1;

(3) una coppia formata da P_1 in N_1 e P_1 in O.

Il momento della prima coppia è P_1y_1, e questa coppia, senza alterare il suo effetto, può essere trasferita nel piano delle (y,z), che è parallelo al suo piano primitivo. Il momento della seconda coppia è P_1x_1, e la coppia è nel piano delle (x,z).

Se effettuiamo una simile trasformazione di tutte le forze, abbiamo, come risultante del sistema il sistema seguente,

(1) una forza ΣP agente in O;

(2) una coppia ΣPy nel piano delle (y,z);

(3) una coppia ΣPx nel piano delle (x,z).

La prima coppia tende a girare il corpo dall'asse delle y a quello delle z, e la seconda dall'asse delle x a quello delle z. Possiamo perciò prendere Ox come *asse* della prima coppia secondo la definizione nell'Art. 41. Per la seconda coppia, però, dobbiamo o prendere Oy' come asse, o considerarla come una coppia che gira da z ad x, di cui il momento è $-\Sigma Px$ e l'asse Oy. Adottando l'ultimo metodo, possiamo rimpiazzare le due coppie con una sola coppia di cui il momento è G, dove

$$G^2 = (\Sigma Px)^2 + (\Sigma Py)^2,$$

e l'asse è inclinato all'asse delle x sotto un angolo a dato dalle equazioni

$$\cos a = \frac{\Sigma Py}{G}; \quad \operatorname{sen} a = \frac{-\Sigma Px}{G}.$$

70. *Trovare le condizioni di equilibrio di un sistema di forze parallele agenti su di un corpo solido.*

Un sistema di forze parallele si può sempre ridurre ad una sola forza e ad una coppia. Poichè queste non si possono bilanciare, e nessuna di esse isolatamente può mantenere l'equilibrio, esse debbono svanire entrambe. Cioè,

$$\Sigma P = 0, \quad \text{e} \quad G = 0;$$

l'ultima richiede che

$$\Sigma Px = 0, \quad \text{e} \quad \Sigma Py = 0.$$

Quindi *un sistema di forze parallele agenti su di un corpo rigido sarà in equilibrio se svanisce la somma delle forze, e svanisce anche la somma dei momenti rispetto a due piani perpendicolari tra loro e paralleli alle forze.*

Viceversa, se le forze sono in equilibrio svanirà la somma delle forze, ed anche la somma dei momenti rispetto a due piani qualunque perpendicolari tra loro e paralleli àlle forze.

71. Quando $\Sigma P=0$, le forze si riducono ad una coppia di cui il momento è G. Quando ΣP non è $=0$, le forze si possono sempre ridurre ad una sola forza; questo si è già veduto nell'Art. 66, e si può anche dimostrare così. Le forze si ridurranno ad una

risultante R agente nel punto (x',y'), parallela alle forze primitive, purchè una forza $-R$ agente in questo punto mantenga con le forze date l'equilibrio. Per ciò le condizioni necessarie e sufficienti sono, per l'Art. 70,

$$\Sigma P - R = 0\,,\quad \Sigma Px - Rx' = 0\,,\quad \Sigma Py - Ry' = 0\,.$$

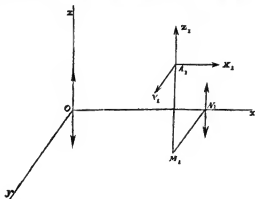
Quindi $$R = \Sigma P,\quad x' = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}\,,\quad y' = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}.$$

Questi risultati sono d'accordo con quelli dell'Art. 66.

72. *Trovare le risultanti di un numero qualunque di forze agenti su di un corpo rigido con direzioni qualunque.*

Siano le forze riferite a tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz; si suppongano $P_1, P_2, P_3, \ldots$ le forze; siano x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto di applicazione di P_1 : x_2, y_2, z_2 le coordinate del punto di applicazione di P_2; e così di seguito.

Sia A_1 il punto di applicazione di P_1; si risolva P_1 nelle com-

ponenti X_1, Y_1, Z_1, parallele agli assi coordinati. La direzione di Z_1 incontri il piano delle (x,y) in M_1, e si tiri M_1N_1 perpendicolare ad Ox. Si applichino in N_1 ed anche in O due forze ciascuna eguale e parallela a Z_1, ed in direzioni opposte. Quindi Z_1 in A_1 o in M_1 è equivalente a Z_1 in O, e a due coppie, la prima che ha il suo momento $= Z_1 \cdot N_1M_1$, e si può supporre agire nel piano delle (y,z), e la seconda che ha il suo momento $= Z_1 \cdot ON_1$ ed agisce nel piano delle (z,x).

Considereremo come positive quelle coppie che tendono a girare il corpo intorno l'asse delle x da y a z, come anche quelle che tendono a girare il corpo intorno l'asse delle y da z ad x, e

quelle che tendono a girare il corpo intorno l'asse delle z da x ad y.

Qnindi Z_1 è rimpiazzata da Z_1 in O, una coppia $Z_1 y_1$ nel piano delle (y,z), ed una coppia $-Z_1 x_1$ nel piano delle (z,x). Similmente X_1 può essere rimpiazzata da X_1 in O, una coppia $X_1 z_1$ nel piano delle (z,x), ed nna coppia $-X_1 y_1$ nel piano delle (x,y). Ed Y_1 può essere rimpiazzata da Y_1 in O, una coppia $Y_1 x_1$ nel piano delle (x,y), ed una coppia $-Y_1 z_1$ nel piano delle (y,z). Quindi la forza P_1 può essere rimpiazzata da X_1, Y_1, Z_1 agenti in O, e le coppie di cni i momenti sono, per l'Art. 48,

$$Z_1 y_1 - Y_1 z_1 \text{ nel piano delle } (y, z),$$
$$X_1 z_1 - Z_1 x_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (z, x),$$
$$Y_1 x_1 - X_1 y_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (x, y).$$

Con una simile risoluzione di tutte le forze le rimpiazzeremo con le forze

$$\Sigma X, \quad \Sigma Y, \quad \Sigma Z,$$

agenti in O secondo gli assi, e le coppie

$$\Sigma (Zy - Yz) = L \text{ supponiamo, nel piano delle } (y, z),$$
$$\Sigma (Xz - Zx) = M \dots\dots\dots\dots , \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (z, x),$$
$$\Sigma (Yx - Xy) = N \dots\dots\dots\dots , \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (x, y).$$

Sia R la risultante delle forze che agiscono in O; e siano a, b, c gli angoli che la sua direzione fa con gli assi; allora, per l'Art. 24,

$$R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2,$$

$$\cos a = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma Z}{R}.$$

Sia G il momento della coppia risultante delle tre coppie L, M, N; e siano λ, μ, ν gli angoli che il suo asse fa con gli assi coordinati; allora, per l'Art. 50,

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

$$\cos \lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos \mu = \frac{M}{G}, \quad \cos \nu = \frac{N}{G}.$$

La convenzione adottata in questo Articolo per distinguere i segni delle coppie è d'accordo con quella nell'Art. 41 quando gli assi delle x, y, e z sono condotti come nella presente figura, ma le convenzioni non coincideranno necessariamente se la figura è modificata; per esempio, se gli assi delle y e delle z si

ritengono come nella figura, ma la parte positiva dell'asse delle x è diretta a sinistra invece che a dritta, esse non coincideranno. La convenzione del *presente* Articolo è quella che in seguito sempre riterremo.

73. *Trovare le condizioni di equilibrio di un numero qualunque di forze agenti su di un corpo rigido con direzioni qualunque.*

Un sistema di forze agenti su di un corpo rigido si può sempre ridurre ad una sola forza e ad una coppia. Siccome queste non si possono bilanciare tra loro e non possono separatamente mantenere l'equilibrio esse debbono svanire entrambe. Quindi $R=0$, e $G=0$; onde

$$(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2 = 0,$$

ed

$$L^2 + M^2 + N^2 = 0.$$

Queste conducono alle sei condizioni

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

74. Si può dare un enunciato alle ultime tre equazioni per mezzo di una nuova definizione. Giova ripetere le due definizioni già date negli Art. 54 e 67.

Momento di una forza rispetto ad un *punto*. Il momento di una forza rispetto ad un punto è il prodotto della forza per la perpendicolare dal punto sulla direzione della forza.

Momento di una forza rispetto ad un *piano*. Il momento di una forza rispetto ad un piano è il prodotto della forza per la distanza del suo punto di applicazione dal piano.

Momento di una forza rispetto ad una *linea retta*. Si risolva la forza in due componenti rispettivamente l'una parallela e l'altra perpendicolare alla linea retta; il prodotto della componente perpendicolare alla linea per la minima distanza tra la linea retta e la direzione di questa componente si chiama il *momento* della forza rispetto alla linea retta.

Quindi il momento di una forza rispetto ad una linea retta è eguale al momento della componente della forza perpendicolare alla linea retta rispetto al *punto* nel quale il piano condotto per questa componente perpendicolarmente alla linea retta incontra la linea retta. Quindi, per l'Art. 62, il momento della forza si può trovare prendendo la somma dei momenti di due forze qualunque nelle quali si può risolvere la componente perpendicolare.

Se la forza è *parallela* alla data linea retta, il suo momento rispetto alla linea retta è zero. Se la forza è *perpendicolare* alla

data linea retta, il suo momento rispetto alla linea retta è il prodotto della forza per la minima distanza tra essa e la data linea retta.

75. Snpponiamo che si voglia il momento della forza P_1 rispetto all' asse delle z; risolviamo P_1 nella forza Z_1 parallela all' asse delle z e Q_1 perpendicolare all' asse delle z, in cui Q_1 è essa stessa la risultante di X_1 ed Y_1. Il momento di Q_1 rispetto all' asse delle z è eguale alla somma algebrica dei momenti delle sue componenti X_1 ed Y_1; cioè, ad Y_1x_1-X_1y_1. Quindi N nell' Art. 72 dinota *la somma dei momenti delle forze intorno* l'asse delle z, ed un simile significato si ha per L ed M.

Quindi, le forze agenti su di un corpo rigido saranno in equilibrio se *svaniscono le somme delle parti risolute delle forze parallele a tre linee rette ad angoli retti tra loro, e svaniscono ancora le somme dei momenti delle forze rispetto a queste linee rette.*

Viceversa, se le forze sono in equilibrio, svanirà la somma delle parti risolute delle forze in una direzione qualunque, ed anche la somma dei momenti delle forze rispetto ad una linea retta qualnnque.

76. Per interpetrare il significato di G osserviamo che se riteniamo la stessa origine, il momento di questa coppia e la direzione del suo asse debbono essere indipendenti dalle direzioni degli assi coordinati. Infatti R, essendo la risultante di tutte le forze date, supponendole applicate ad un pnnto, è naturalmente indipendente dalla direzione degli assi. Se con una nuova scelta di assi otteniamo G' per coppia risultante, allora R e G debbono essere equivalenti ad R e G', e qnindi R, G, $-R$, $-G'$ debbono formare un sistema in equilibrio. Ma ciò è impossibile a meno che non si abbia $G=G'$ e gli assi di G e G' coincidenti o paralleli.

Poichè la direzione degli assi coordinati è arbitraria, supponiamo che l' asse delle x coincida con l'asse di G; allora $M=0$, $N=0$, ed L e G sono identici.

Quindi G *è eguale alla somma dei momenti delle forze date rispetto alla linea retta che è l'asse di* G.

77. Snpponiamo che una forza P agisca nel punto (x,y,z), e siano X,Y,Z le sue componenti parallele agli assi. Allora, per l' Art 72, P nel punto (x,y,z) è equivalente a P nell'origine, insieme con le coppie $Zy-Yz$, $Xz-Zx$, $Yx-Xy$ intorno agli assi delle x,y,z rispettivamente. Sia H la coppia risultante, r la distanza del punto (x,y,z) dall' origine, ed α l'angolo tra r e P; allora

$$H^2 = (Zy - Yz)^2 + (Xz - Zx)^2 + (Yx - Xy)^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (xX + yY + zZ)^2$$
$$= r^2P^2 - r^2P^2\left(\frac{x}{r}\frac{X}{P} + \frac{y}{r}\frac{Y}{P} + \frac{z}{r}\frac{Z}{P}\right)^2$$
$$= r^2P^2(1 - \cos^2\alpha),$$

quindi $H = rP \operatorname{sen}\alpha$.

Così, come si poteva prevedere, H è il momento della coppia formata da P nel punto (x,y,z), e da una forza nell'origine eguale a P ed agente in una direzione parallela ed opposta. Quindi G è la coppia formata dal comporre le coppie simili ad H che nascono da tutte le forze del sistema.

78. Come un esempio dell'Art. 73 possiamo prendere il caso in cui tutte le forze sono *parallele*. Siano α,β,γ gli angoli che la direzione delle forze $P_1, P_2, \ldots$ fa con gli assi. Allora le equazioni di equilibrio si riducono a

$$\Sigma P = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0,$$
$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0.$$

Le ultime tre equazioni si possono scrivere così:

$$\frac{\Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\cos\gamma}.$$

Quindi possiamo dedurre le condizioni affinchè un sistema di forze *parallele* mantenga un corpo in equilibrio, *comunque esse girino intorno ai loro punti di applicazione*. Infatti le equazioni precedenti debbono allora reggere qualunque siano α,β,γ. Così dobbiamo avere

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0, \quad \Sigma Pz = 0.$$

79. Nell'Art. 72 abbiamo ridotto le forze agenti su di un corpo ad una forza R e ad una coppia G. Se G svanisce vi rimane una sola forza; e se R svanisce, una sola coppia. Se nè R nè G svanisce le forze si *possono* ridurre ad una forza sola; andiamo a mostrare quando ciò è possibile.

Trovare la condizione tra le forze affinchè esse abbiano una sola risultante.

Un sistema qualunque di forze si può ridurre ad una sola forza R e ad una coppia G; se allora le forze si possono ridurre ad una

sola risultante S, ne segue che G, R, e $-S$ sono in equilibrio. Se R e $-S$ non formano una coppia, esse si possono ridurre ad una coppia G' e ad una forza R'; quindi R' deve bilanciare la coppia composta da G e G'. Questo è impossibile per l'Art. 40. Quindi R e $-S$ debbono formare una coppia, e questa coppia deve avere il suo piano coincidente con quello di G, o parallelo a quello di G, affinchè essa possa bilanciare G. Perciò affinchè le forze abbiano una sola risultante, la direzione di R deve essere parallela al piano di G, o coincidente con esso; cioè, deve essere ad *angoli retti con l'asse di* G. Quindi, usando la notazione dell'Art. 72,

$$\cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu = 0,$$

quindi
$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0,$$

80. Viceversa, se $L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0$; e $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ *non svaniscono tutte*, le forze si possono ridurre ad una forza sola. Infatti si può fare che il piano della coppia G contenga la forza R, e si può supporre che la coppia abbia ciascuna delle sue forze $=R$ ed il suo braccio per conseguenza $=\frac{G}{R}$; la coppia allora si può girare nel suo proprio piano finchè la forza in una estremità del suo braccio bilanci la forza risultante R, e rimane R all'altra estremità del braccio.

81. *Quando le forze sono riducibili ad una sola risultante, trovare le equazioni della linea retta nella quale essa agisce.*

Dinotino L, M, N i momenti delle forze intorno agli assi coordinati; L', M', N' i momenti delle forze intorno ad assi paralleli agli assi coordinati condotti pel punto (x', y', z'). Allora L' si trova scrivendo $y_1 - y'$ per y_1, $y_2 - y'$ per y_2, ... $z_1 - z'$ per z_1, $z_2 - z'$ per z_2, ... nell'espressione $\Sigma(Zy - Yz)$. Quindi

$$L' = \Sigma\{Z(y - y') - Y(z - z')\}$$
$$= L - y'\Sigma Z + z'\Sigma Y.$$

Similmente

$$M' = \Sigma\{X(z - z') - Z(x - x')\}$$
$$= M - z'\Sigma X + x'\Sigma Z,$$
$$N' = \Sigma\{Y(x - x') - X(y - y')\}$$
$$= N - x'\Sigma Y + y'\Sigma X.$$

Se x', y', z' sono prese in modo da far svanire L', M', ed N', le

forze si riducono ad una sola risultante che passa pel punto (x', y', z'). Le tre equazioni

$$L - y'\Sigma Z + z'\Sigma Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$M - z'\Sigma X + x'\Sigma Z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
$$N - x'\Sigma Y + y'\Sigma X = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

equivalgono a due equazioni indipendenti; infatti se eliminiamo z da (1) e (2), abbiamo

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + \Sigma Z\,(x'\Sigma Y - y'\Sigma X) = 0.$$

Ma $\quad L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0$, per l'Art. 79,

quindi $\quad N - x'\Sigma Y + y'\Sigma X = 0.$

Così (3) è una conseguenza necessaria di (1) e (2). Quindi (1) e (2) determineranno una linea retta in ciascun punto della quale la coppia risultante svanisce; cioè, la linea retta secondo la quale agisce la sola forza risultante.

82. Col metodo seguente possiamo determinare ad un tempo la condizione per l'esistenza di una sola risultante e le equazioni della sua direzione.

Supponiamo che le forze si possano ridurre ad una sola forza agente nel punto (x', y', z'). Si risolva questa forza nelle componenti X', Y', Z' parallele agli assi coordinati; allora se aggiungiamo al sistema dato $-X', -Y'$, e $-Z'$, agenti nel punto (x', y', z') parallele agli assi rispettivamente, vi sarà equilibrio. Quindi, per l'Art. 73,

$$\Sigma X - X' = 0, \quad \Sigma Y - Y' = 0, \quad \Sigma Z - Z' = 0, \ldots (1),$$

$$\left.\begin{aligned} L - Z'y' + Y'z' &= 0 \\ M - X'z' + Z'x' &= 0 \\ N - Y'x' + X'y' &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Le equazioni (1) determinano X', Y', Z'. Sembrerebbe a primo aspetto che le equazioni (2) determinassero x', y', z'; ma se procediamo alla loro risoluzione, troviamo che *esse non possono essere simultaneamente vere a meno che non sia*

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0;$$

e se questa condizione è soddisfatta, e $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ non svaniscono tutte, allora una qualunque delle equazioni si può dedurre dalle altre due, sicchè vi sono solamente *due* equazioni *indipendenti*. Quindi affinchè le forze abbiano una sola risultante la condizione precedente deve essere soddisfatta, ed allora due qualun-

que delle equazioni (2) determineranno il luogo dei punti nei quali si può supporre che questa sola risultante agisca. Dalla forma delle equazioni (2) è chiaro che questo luogo è una linea retta, e che i suoi coseni di direzione sono proporzionali ad X', Y', Z', come si poteva prevedere.

Affinchè la forza che rimpiazza il sistema passi per l'origine, dobbiamo avere

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0.$$

83. Benchè un sistema di forze non si possa sempre ridurre ad una sola risultante, esso può sempre ridursi a *due* forze. Infatti abbiamo mostrato che il sistema si può rimpiazzare con una forza R all'origine, ed una coppia G che giace in un piano per l'origine; una delle forze di G si può supporre agire nell'origine, e si può comporre con R sicchè questa risultante e l'altra forza di G sono equivalenti all'intero sistema. Poichè l'origine è arbitraria, vediamo che quando un sistema di forze non è riducibile ad una forza sola esso si può ridurre a due forze, una delle quali si può far passare per un punto assegnato qualunque.

84. *Quando tre forze mantengono un corpo in equilibrio, esse debbono giacere nello stesso piano.*

Si tiri una linea retta qualunque che interseghi le direzioni di due delle forze e non sia parallela alla terza forza, e si prenda questa linea retta per asse delle x. Allora le prime due forze non hanno alcun momento intorno l'asse delle x; quindi l'equazione $L=0$ richiede che la terza forza non abbia alcun momento intorno l'asse delle x; cioè, la direzione della terza forza deve appoggiarsi all'asse delle x. Quindi poichè *ogni* linea retta che incontra le direzioni di due delle forze, e non è parallela alla direzione della terza, incontra quella direzione, le tre forze debbono giacere in un piano.

Combinando questa proposizione con quella nell'Art. 58, vediamo che se tre forze tengono un corpo in equilibrio, esse debbano tutte giacere nello stesso piano e debbono incontrarsi in un punto o essere parallele.

85. Se gli assi delle coordinate sono obliqui, supponiamo che l, m, n dinotino i seni degli angoli tra gli assi delle y e z, z ed x, x ed y rispettivamente; allora possiamo mostrare, come nell'Art. 72, che un sistema qualunque di forze si può ridurre a $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$, agenti nell'origine secondo gli assi delle x, y, z rispettivamente, ed a tre coppie nei tre piani coordinati, avendo i loro momenti eguali ad lL, mM, nN rispettivamente, dove, come sopra,

$$L=\Sigma(Zy-Yz), \quad M=\Sigma(Xz-Zx), \quad N=\Sigma(Yx-Xy).$$

Ancora per l'equilibrio, dobbiamo avere, come sopra,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0;$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Affinchè le forze ammettano una sola risultante dobbiamo avere, come sopra,

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0,$$

e che ΣX, ΣY, ΣZ non tutte svaniscano.

Le proposizioni seguenti sono connesse col soggetto di questo Capitolo, e sono di facile dimostrazione.

I. Delle forze agiscono nei vertici di un tetraedro in direzioni rispettivamente perpendicolari alle facce opposte e proporzionali in grandezza alle aree delle facce: le forze saranno in equilibrio.

II. Quattro forze agiscono su di un tetraedro ad angoli retti sulle facce e proporzionali alle loro aree, i punti di applicazione delle forze essendo i centri dei cerchi circoscritti alle facce: se le forze agiscono tutte all'indentro o tutte all'infuori esse saranno in equilibrio.

III. Delle forze agiscono su di un poliedro terminato da facce triangolari ad angoli retti sulle facce e proporzionali alle loro aree, i punti di applicazione delle forze essendo i centri dei cerchi circoscritti alle facce; se le forze agiscono tutte all'indentro o tutte all'infuori esse saranno in equilibrio.

IV. Se quattro forze agenti su di un corpo rigido sono in equilibrio, e si costruisce un tetraedro conducendo dei piani ad angoli retti con le direzioni delle forze, le forze saranno rispettivamente proporzionali alle aree delle facce.

ESEMPII.

1. Quattro forze parallele agiscono negli angoli di un quadrilatero piano e sono inversamente proporzionali ai segmenti delle sue diagonali più prossimi ad esse; mostrare che il punto di applicazione della loro risultante cade nell'intersezione delle diagonali.

2. Delle forze parallele agiscono negli angoli A, B, C di un triangolo e sono rispettivamente proporzionali ad a, b, c; mostrare che la loro risultante agisce nel centro del cerchio iscritto.

3. Un cono di cui l'angolo al vertice è 30°, ed il peso è W, è situato col suo vertice su di un piano orizzontale levigato; mo-

strare che esso può essere tenuto col suo lato obliquo in una posizione verticale per mezzo di una coppia di cui il braccio è eguale alla lunghezza del lato obliquo del cono, e ciascuna forza $\frac{3W}{16}$.

4. Sei forze eguali agiscono secondo gli spigoli di un cubo che non incontrano una data diagonale, presi in ordine; trovare la loro risultante.

Risultato. Una coppia, il momento della quale è $2Pa\sqrt{3}$, dove P dinota ciascuna forza ed a il lato del cubo.

5. Un cubo è sollecitato da quattro forze; una forza è in una diagonale, e le altre in spigoli due qualunque dei quali non sono in uno stesso piano e che non incontrano la diagonale; trovare la condizione affinchè le forze abbiano una sola risultante.

Risultato. $(XY+YZ+ZX)\sqrt{3}+P(X+Y+Z)=0$; dove X, Y, Z dinotano le forze secondo gli spigoli, e P la forza secondo la diagonale.

6. Se un triangolo è sospeso da un punto fisso per mezzo di funi legate agli angoli, la tensione di ciascuna fune è proporzionale alla sua lunghezza.

7. Un triangolo pesante uniforme è sostenuto in una posizione orizzontale da tre funi parallele legate ai tre lati rispettivamente; mostrare che le funi possono essere disposte relativamente in infinite maniere in modo che le loro tensioni siano eguali, ma la situazione di una essendo data, quella di ciascuna delle altre due è determinata.

8. Una sfera di dato peso poggia su tre piani di cui le equazioni sono

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$
$$x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 = 0,$$
$$x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 = 0,$$

l'asse delle z essendo verticale; trovare la pressione su ciascun piano.

9. Un triangolo pesante ABC è sospeso da un punto per mezzo di tre funi, ad angoli retti tra loro, legate agli angoli del triangolo; se θ è l'inclinazione del triangolo all'orizzonte nella sua posizione di equilibrio, allora

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{(1+\sec A\sec B\sec C)}}.$$

10. Un triangolo equilatero senza peso ha tre elementi diseguali situati nei suoi vertici; il sistema è sospeso da un punto fisso per mezzo di tre funi eguali ad angoli retti tra loro legate ai vertici del triangolo; trovare l'inclinazione del piano del triangolo all'orizzonte.

Risultato. Il coseno dell'angolo è $\frac{W_1+W_2+W_3}{\sqrt{\{3(W_1^2+W_2^2+W_3^2)\}}}$, in cui W_1, W_2, W_3 rappresentano i pesi degli elementi.

11. Quattro sfere eguali levigate sono situate in una conca emisferica. I centri di tre di esse sono nello stesso piano orizzontale, e quello dell'altra è al di sopra di esso. Se il raggio di ciascuna sfera è un terzo di quello della conca, mostrare che le pressioni scambievoli delle sfere sono tutte eguali; e trovare la pressione di ciascuna delle sfere inferiori sulla conca.

Risultati. Sia W il peso di ciascuna delle sfere; allora ciascuna delle pressioni scambievoli tra le sfere è $\frac{W}{\sqrt{6}}$; è $\frac{4W}{\sqrt{6}}$, è la pressione di ciascuna delle sfere inferiori sulla conca.

12. Tre sfere eguali pendono a contatto da un punto fisso per mezzo di tre funi eguali; trovare la più pesante sfera di dato raggio che si può poggiare su di esse senza che si separino.

Risultato. Sia W il peso di ciascuna delle sfere eguali, θ l'angolo che ciascuna fune fa con la verticale, φ l'angolo che la congiungente del centro di una delle tre sfere eguali col centro della sfera superiore fa con la verticale; allora il peso della sfera superiore non deve eccedere $\frac{3W\tan\theta}{\tan\varphi-\tan\theta}$.

13. $ABCD$ è un tetraedro in cui gli spigoli AB, AC, AD sono ad angoli retti tra loro; delle forze sono rappresentate in grandezza e direzione da AB, AC, AD, BC, CD, DB: determinare la loro risultante.

14. Tre sfere eguali vuote posano simmetricamente nell'interno di un paraboloide di rotazione levigato, di cui l'asse è verticale; una sfera solida di eguale raggio è situata su di esse: mostrare che l'equilibrio sarà distrutto se il raggio delle sfere è minore di $\frac{l}{2\sqrt{6}}$, in cui l è il lato retto; il peso delle sfere vuote essendo trascurato in confronto di quello della sfera solida.

CAPITOLO VI.

Equilibrio di un corpo non libero.

86. *Trovare le condizioni di equilibrio delle forze agenti su di un corpo rigido quando un punto è fisso.*

Si prenda il punto fisso per origine delle coordinate. L'azione delle forze sul corpo produrrà una pressione sul punto fisso; siano X', Y', Z' le parti risolute di questa pressione parallele agli assi. Allora il punto fisso eserciterà le forze $-X'$, $-Y'$, $-Z'$ contro il corpo; e se consideriamo queste forze in connessione con le forze date, possiamo supporre il corpo libero, e le equazioni di equilibrio sono

$$\Sigma X - X' = 0, \quad \Sigma Y - Y' = 0, \quad \Sigma Z - Z' = 0,$$
$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Le prime tre equazioni danno le parti risolute della pressione sul punto fisso; e le ultime tre sono le sole condizioni che debbono essere soddisfatte dalle forze date. Così le forze saranno in equilibrio se *svaniscono le somme dei momenti delle forze rispetto a tre linee rette ad angoli retti tra loro, e che passano pel punto fisso.*

Viceversa, se le forze sono in equilibrio svanirà la somma dei momenti delle forze rispetto ad una linea retta qualunque condotta pel punto fisso.

Dalle equazioni $X' = \Sigma X$, $Y' = \Sigma Y$, $Z' = \Sigma Z$, ne segue che la pressione sul punto fisso è eguale alla risultante di tutte le forze date del sistema mosse parallelamente a loro stesse sino al punto fisso.

Se tutte le forze sono parallele, possiamo prendere l'asse delle z che passi pel punto fisso e sia parallelo alle forze. Allora tutte le forze incluse in ΣX svaniscono, come anche tutte le forze incluse in ΣY; così N svanisce, M si riduce a $-\Sigma Zx$, ed L si riduce a ΣZy. Quindi X' ed Y' svaniscono e le equazioni di equilibrio si riducono a

$$\Sigma Z - Z' = 0, \quad \Sigma Zy = 0, \quad \Sigma Zx = 0;$$

la prima determina la pressione sul punto fisso e le altre due sono le condizioni che debbono essere soddisfatte dalle forze date.

Se tutte le forze agiscono in un piano che passa pel punto fisso, e prendiamo questo piano per quello delle (x,y), tutte le forze incluse in ΣZ svaniscono; inoltre l'ordinata parallela all'asse

delle z del punto di applicazione di ciascuna forza è zero. Così L ed M svaniscono; ancora Z' svanisce, e le equazioni di equilibrio si riducono a

$$\Sigma X - X' = 0, \quad \Sigma Y - Y' = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0;$$

le prime due determinano la pressione sul punto fisso, e la terza è la sola condizione che le forze debbono soddisfare. Così le forze saranno in equilibrio se *svanisce la somma dei momenti delle forze rispetto alla linea retta perpendicolare al loro piano, e che passa pel punto fisso;* e viceversa, se le forze sono in equilibrio svanirà la somma dei momenti delle forze rispetto a questa linea retta.

87. *Trovare la condizione di equilibrio di un corpo che ha in sè due punti fissi.*

L'asse delle z passi per i due punti fissi; e siano z' e z'' le distanze dei punti dall'origine. Inoltre siano X', Y', Z' le parti risolute delle pressioni sopra uno dei punti, ed X'', Y'', Z'' quelle sull'altro punto.

Allora, come nell'Art. 86, le equazioni di equilibrio saranno

$$\Sigma X - X' - X'' = 0, \quad \Sigma Y - Y' - Y'' = 0, \quad \Sigma Z - Z' - Z'' = 0,$$
$$L + Y'z' + Y''z'' = 0, \quad M - X'z' - X''z'' = 0, \quad N = 0.$$

La prima, seconda, quarta, e quinta di queste equazioni determineranno X', X'', Y', Y''; la terza equazione dà $Z' + Z''$, mostrando che le pressioni su i punti fissi nella direzione della linea che li congiunge sono indeterminate, essendo legate da una sola equazione. L'ultima è la sola condizione di equilibrio, cioè $N = 0$. Così le forze saranno in equilibrio se *svanisce la somma dei momenti delle forze rispetto alla linea retta che passa per i punti fissi*; e viceversa, se le forze sono in equilibrio svanirà la somma dei momenti delle forze rispetto a questa linea retta.

88. L'indeterminazione che si trova circa i valori di Z' e Z'' poteva prevedersi; poichè se due forze, $-Z'$ e $-Z''$, agiscono su di un corpo rigido *nella stessa linea retta*, il loro effetto sarà lo stesso a qualunque punto della loro linea d'azione le supponiamo applicate, e per conseguenza esse si possono supporre agire entrambe nello stesso punto, o pure una di esse può essere accresciuta purchè l'altra sia egualmente diminuita. Se si obbiettasse che in ogni caso sperimentale vi sarebbe realmente una *definita* pressione in ciascun punto fisso, possiamo rispondere, che nessun corpo sul quale possiamo fare i nostri esperimenti soddisfa alla condizione di *rigidità perfetta*, dalla quale dipendono le no-

stre conclusioni. Si vegga *Poisson*, Art. 230; e *Poinsot*, Articoli 128–132.

Il caso che abbiamo considerato è quello di un corpo che è capace di girare intorno ad un *asse fisso*; poichè un asse sarà fisso se due dei *suoi* punti sono fissi.

89. Se il corpo, invece di avere due punti fissi, può girare intorno ad un asse ed *anche scorrere lungo di esso*, allora oltre della condizione $N=0$, dobbiamo avere $\Sigma Z=0$, supponendo l'asse delle z diretto secondo la linea retta sulla quale il corpo può girare e scorrere. Poichè l'asse non sarà capace, come nell'ultimo caso, di fornire delle forze $-Z'$ e $-Z''$ per controbilanciare ΣZ, e quindi ΣZ deve essere $=0$.

90. *Trovare le condizioni di equilibrio di un corpo rigido che poggia su di un piano levigato.*

Sia questo piano il piano delle (x,y); e siano x',y' le coordinate di uno dei punti di contatto, R' la pressione che il corpo esercita contro il piano in quel punto. Allora la forza $-R'$, e simili forze per gli altri punti di contatto, prese in connessione con le forze date, debbono soddisfare le equazioni di equilibrio; quindi

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z - R' - R'' - \ldots = 0,$$

$$L - R'y' - R''y'' - \ldots = 0, \quad M + R'x' + R''x'' + \ldots = 0, \quad N = 0.$$

Se solamente un punto è in contatto col piano, allora la terza equazione dà la pressione, ed abbiamo cinque equazioni di condizione,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad L - y'\Sigma Z = 0, \quad M + x'\Sigma Z = 0, \quad N = 0.$$

Se due punti sono in contatto, allora le equazioni

$$R'y' + R''y'' = L, \quad R'x' + R''x'' = -M,$$

danno

$$R' = \frac{Lx'' + My''}{y'x'' - x'y''}, \quad R'' = -\frac{Lx' + My'}{y'x'' - x'y''};$$

e le equazioni di condizione sono

$$\Sigma X = 0, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma Z - \frac{L(x''-x') + M(y''-y')}{y'x'' - x'y''} = 0, \text{ ed } N = 0.$$

Se tre punti sono in contatto, allora le pressioni sono determinate dalle equazioni

$$R' + R'' + R''' = \Sigma Z,$$
$$R'y' + R''y'' + R'''y''' = L.$$
$$R'x' + R''x'' + R'''x''' = -M,$$

e le condizioni di equilibrio sono

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad N = 0.$$

Se più di tre punti sono in contatto, allora le pressioni sono indeterminate, poichè esse sono legate solamente da tre equazioni; ma le condizioni di equilibrio sono ancora

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad N = 0.$$

91. Le equazioni nel principio dell' Articolo precedente mostrano che se un corpo è in equilibrio contro un piano, le forze che lo premono contro il piano debbono ridursi ad una *sola forza* agente in una direzione perpendicolare al piano, infatti la condizione

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0$$

è soddisfatta, poichè ΣX, ΣY, ed N svaniscono. Quindi le forze si riducono ad una sola forza; e poichè ΣX e ΣY svaniscono, questa forza deve essere perpendicolare al piano fisso.

Inoltre, questa forza unica deve controbilanciare le forze $-R'$, $-R''$..., che sono tutte parallele ed agiscono tutte nella stessa direzione. Quindi, considerando la costruzione data nell' Art. 66 per determinare il centro di un sistema di forze parallele, ne segue che il punto dove questa risultante incontra il piano deve cadere dentro di un poligono, formato col congiungere i punti di contatto in modo da includerli tutti, e da non avere alcun *angolo rientrante*.

ESEMPII DIVERSI.

1. Il coperchio $ABCD$ di una scatola cubica, mobile intorno a gangheri in A e B, è mantenuta con un dato angolo all' orizzonte da una fune orizzontale che congiunge C con un punto verticalmente al di sopra di A: trovare la pressione su ciascun ganghero.

2. Due forze eguali agiscono su di un cubo il di cui centro è fisso, secondo diagonali che non s' incontrano di due facce adiacenti: trovare la coppia che manterrà il cubo in equilibrio.

Risultato. Dinoti P ciascuna forza, a il lato del cubo; il momento della coppia richiesta è $\frac{Pa\sqrt{3}}{2}$ o $\frac{Pa}{2}$ a seconda delle direzioni delle due forze date.

3. Tre verghe eguali pesanti nella posizione dei tre spigoli di una piramide triangolare invertita sono in equilibrio nelle se-

guenti circostanze: le loro estremità superiori sono connesse da funi di eguali lunghezze, e le loro estremità inferiori sono attaccate ad un ganghero intorno al quale le verghe si possono muovere liberamente in tutte le direzioni. Trovare la tensione delle funi.

4. Un dato numero di verghe pesanti uniformi, tutte dello stesso peso, hanno le loro estremità congiunte insieme in un ganghero comune, intorno al quale esse possono girare liberamente, ed essendo introdotte a traverso un foro circolare in un piano orizzontale col loro estremo a ganghero in basso, si spandono fuori simmetricamente lungo la circonferenza del foro come le costole di un paniere conico. Se ora si pone una sfera pesante nell' interno del sistema delle verghe, in modo da essere sostenuta da esse, determinare la posizione di equilibrio.

5. Un cilindro con la sua base poggiata contro un piano verticale levigato è mantenuto da una fune legata ad esso in un punto della sua superficie curva di cui la distanza dal piano verticale è h. Mostrare che h deve essere maggiore di $b-2a\tan\theta$ e minore di b, in cui $2b$ è l'altezza del cilindro, a il raggio della base, e θ l'angolo che la fune fa con la verticale.

6. Un cilindro poggia con la sua base sopra un piano inclinato levigato; una fune attaccata al suo punto più alto, passando sopra una carrucola alla sommità del piano inclinato, pende verticalmente e sopporta un peso; la porzione della fune tra il cilindro e la carrucola è orizzontale. Determinare le condizioni di equilibrio.

Risultati. Sia W il peso del cilindro, W' il peso legato alla fune, α l'inclinazione del piano all'orizzonte; allora $W'=W\tan\alpha$ e $\tan\alpha$ non deve eccedere il rapporto del diametro della base del cilindro all' altezza del cilindro.

7. Un cono di dato peso W è situato con la sua base sopra un piano inclinato, e sostenuto da un peso W' che pende da una fune legata al vertice del cono e che passa sopra una carrucola nel piano inclinato alla stessa altezza del vertice. Determinare le condizioni di equilibrio.

Risultati. Sia α l'inclinazione del piano all'orizzonte, θ il semi-angolo al vertice del cono; allora $W'=W\tan\alpha$, e $\tan\theta$ non deve essere minore di $\frac{3}{8}$ sen 2α.

8. Un guscio emisferico levigato di cui la base è chiusa racchiude due sfere eguali i di cui raggi sono un terzo di quello

del guscio. Il guscio è fissato con la sua base verticale; trovare le pressioni scambievoli in tutt'i punti di contatto.

Risultati. Sia R_1 la pressione tra la sfera superiore ed il guscio, R_2 quella tra le due sfere, R_3 quella tra la sfera inferiore e la base del guscio, R_4 quella tra la sfera inferiore e la parte curva del guscio; allora

$$R_1 = \frac{W}{\sqrt{3}}, \quad R_2 = \frac{2W}{\sqrt{3}}, \quad R_3 = \frac{3W}{\sqrt{3}}, \quad R_4 = \frac{4W}{\sqrt{3}}.$$

9. Una tavola rettangolare è sostenuta in una posizione orizzontale da quattro piedi nei suoi quattro angoli: un dato peso W essendo situato sopra un dato punto di essa, mostrare che la pressione sopra ciascun piede è indeterminata, e trovare il massimo ed il minimo valore che essa può avere per una data posizione del peso.

CAPITOLO VII.

Teoremi generali sopra un sistema di forze.

92. Nell'Art. 72 si è dimostrato che le forze agenti su di un corpo rigido si possono ridurre ad una forza R e ad una coppia G, e che $G^2=L^2+M^2+N^2$, in cui L,M,N sono i momenti delle forze intorno a tre assi rettangolari scelti arbitrariamente. È chiaro che nè L, M, nè N può essere maggiore di G; quindi, per una data origine, *il momento risultante* G *è maggiore del momento delle forze intorno ad ogni altro asse.* Per questa ragione G si chiama il *momento principale* delle forze.

Dalle equazioni nell'Art. 72, che determinano la direzione dell'asse di G, ne segue che $G\cos\varphi$ è il momento delle forze intorno ad un asse che passa per la data origine, e fa un angolo φ con l'asse del momento principale.

93. Il valore di R nell'Art. 72 è indipendente dalla posizione dell'origine delle coordinate; R è in fatti la risultante delle forze date, supponendo che ciascuna di esse si muova parallelamente a sè stessa finchè esse agiscano tutte nello stesso punto. Il valore di G, però, dipende dall'origine che prendiamo. Se prendiamo un punto di cui le coordinate sono x',y',z', e dinotiamo con L',M',N' i momenti delle forze rispetto alle linee rette condotte per questo punto parallele agli assi coordinati, e con G' il *momento principale* delle forze rispetto a questo punto, abbiamo, per l'Art. 81,

$$\left.\begin{aligned} L' &= L - y'\Sigma Z + z'\Sigma Y, \\ M' &= M - z'\Sigma X + x'\Sigma Z, \\ N' &= N - x'\Sigma Y + y'\Sigma X, \\ G'^2 &= L'^2 + M'^2 + N'^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Passiamo ad applicare queste equazioni a trovare il minimo valore di G'.

Trovare il luogo delle origini che danno i minimi momenti principali, la grandezza di questi momenti, e la posizione dei loro assi.

Si moltiplichi la prima delle equazioni (1) per ΣX, la seconda per ΣY, e la terza per ΣZ, e si sommino; così

$$L'\Sigma X + M'\Sigma Y + N'\Sigma Z = L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z \;\ldots (2).$$

Ancora

$$R^2G'^2 = \{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2\}\{L'^2 + M'^2 + N'^2\}$$
$$= (N'\Sigma Y - M'\Sigma Z)^2 + (L'\Sigma Z - N'\Sigma X)^2$$
$$+ (M'\Sigma X - L'\Sigma Y)^2 + (L'\Sigma X + M'\Sigma Y + N'\Sigma Z)^2 \ldots\ldots\ldots (3).$$

Di questi quattro termini l'ultimo è *costante* per tutt'i valori di x', y', z' per (2); quindi otteniamo il minimo valore di G' facendo che i tre termini precedenti svaniscano, il che dà

$$\frac{L'}{\Sigma X} = \frac{M'}{\Sigma Y} = \frac{N'}{\Sigma Z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

cioè,

$$\frac{L - y'\Sigma Z + z'\Sigma Y}{\Sigma X} = \frac{M - z'\Sigma X + x'\Sigma Z}{\Sigma Y} = \frac{N - x'\Sigma Y + y'\Sigma X}{\Sigma Z} \ldots (5).$$

Quindi il luogo richiesto è una *linea retta*.

Da (4) apparisce che L', M', N' sono proporzionali a $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ rispettivamente, il che mostra che l'asse del momento principale in ogni punto della linea retta (5) è parallelo alla direzione della risultante R. Da (3) il valore del minimo momento principale è

$$\frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{R}.$$

Ciascuna delle frazioni in (5) è, per un noto teorema, eguale ad

$$\frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2},$$

cioè, ad
$$\frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{R^2}.$$

Le equazioni (5) con convenienti trasformazioni si possono ridurre alle ordinarie equazioni simmetriche di una linea retta. Abbiamo

$$\frac{L - y'\Sigma Z + z'\Sigma Y}{\Sigma X} = \frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{R^2};$$

quindi

$$L\{(\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2\} + (z'\Sigma Y - y'\Sigma Z)R^2 = (M\Sigma Y + N\Sigma Z)\Sigma X;$$

quindi

$$(z'R^2 - M\Sigma X + L\Sigma Y)\Sigma Y = (y'R^2 - L\Sigma Z + N\Sigma X)\Sigma Z;$$

quindi

$$\frac{1}{\Sigma Y}\left(y' - \frac{L\Sigma Z - N\Sigma X}{R^2}\right) = \frac{1}{\Sigma Z}\left(z' - \frac{M\Sigma X - L\Sigma Y}{R^2}\right).$$

Quindi conchiudiamo che le equazioni (5) si possono scrivere

$$\frac{1}{\Sigma X}\left(x' - \frac{N\Sigma Y - M\Sigma Z}{R^2}\right) = \frac{1}{\Sigma Y}\left(y' - \frac{L\Sigma Z - N\Sigma X}{R^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\Sigma Z}\left(z' - \frac{M\Sigma X - L\Sigma Y}{R^2}\right):$$

dalle quali vediamo che la linea retta determinata da (5) è parallela alla direzione di R. Quindi questa linea retta ha le seguenti proprietà: *in ogni punto di essa il valore del momento principale è lo stesso, ed è minore di quello che sia per ogni punto fuori della linea; inoltre per ogni punto nella linea la posizione dell' asse del momento principale è la stessa, essendo la linea stessa*. Questa linea si chiama *l' asse centrale.*

Abbiamo supposto nella ricerca che R non sia zero. Se R è zero abbiamo per ogni origine

$$L' = L, \quad M' = M, \quad N' = N,$$
$$G'^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

94. L' equazione (2) dell' Art. 93 si può scrivere

$$L'\frac{\Sigma X}{R} + M'\frac{\Sigma Y}{R} + N'\frac{\Sigma Z}{R} = L\frac{\Sigma X}{R} + M\frac{\Sigma Y}{R} + N\frac{\Sigma Z}{R}.$$

Questo mostra che se risolviamo L', M', N' secondo una linea retta parallela alla direzione di R, e sommiamo le parti risolute, otteniamo lo stesso risultato *qualunque sia l' origine scelta*. Così *la parte risoluta di ogni momento principale nella direzione di* R *è costante*. Per la parte risoluta del momento principale nella direzione di R intendiamo quella parte del momento che ha il *suo asse* nella direzione di R.

95. Dalle equazioni (1) dell' Art. 93 apparisce che $L'=L$, $M'=M$, ed $N'=N$, purchè

$$\frac{x'}{\Sigma X} = \frac{y'}{\Sigma Y} = \frac{z'}{\Sigma Z};$$

cioè, se il punto (x', y', z') è su di una linea retta condotta per l' origine parallela alla direzione di R. Poichè l' origine è arbitraria, possiamo perciò asserire che il *momento principale rimane immutato, quando il punto al quale si riferisce si muove lungo una linea retta qualunque parallela alla direzione di* R.

96. L'equazione del piano per l'origine perpendicolare alla direzione di R è

$$x'\Sigma X + y'\Sigma Y + z'\Sigma Z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Se combiniamo questa equazione con le equazioni (5) dell'Art. 93, otteniamo le coordinate del punto d'intersezione di questo piano con *l'asse centrale*.

Troviamo così per queste coordinate

$$\frac{N\Sigma Y - M\Sigma Z}{R^2},\quad \frac{L\Sigma Z - N\Sigma X}{R^2},\quad \frac{M\Sigma X - L\Sigma Y}{R^2},$$

che dinoteremo con h, k, l rispettivamente.

Se x', y', z' soddisfano (1), allora $N'\Sigma Y - M'\Sigma Z$

o $\quad (N - x'\Sigma Y + y'\Sigma X)\Sigma Y - (M - z'\Sigma X + x'\Sigma Z)\Sigma Z$

$$= N\Sigma Y - M\Sigma Z - x'R^2 = R^2(h - x').$$

Similmente $\quad L'\Sigma Z - N'\Sigma X = R^2(k - y'),$

$$M'\Sigma X - L'\Sigma Y = R^2(l - z').$$

Quindi dall'equazione (3) dell'Art. 93

$$G'^2 = R^2\{(h - x')^2 + (k - y')^2 + (l - z')^2\}$$
$$+ \left(\frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{R}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Quindi G' rimane costante per tutt'i punti nel piano (1) per i quali $(h-x')^2+(k-y')^2+(l-z')^2$ è costante; cioè, per tutt'i punti in (1) che sono ad una distanza costante dall'*asse centrale*. Da questo e dall'Art. 93 ne segue, che se si descrive un cilindro retto intorno all'*asse centrale, il momento principale ha lo stesso valore per ogni punto sulla superficie di questo cilindro.*

97. Delle due espressioni che compongono G' nell'equazione (2) dell'Art. 96, l'ultima, per l'Art. 94, è la parte risoluta di G' *parallela* alla direzione di R; quindi la prima parte è la parte risoluta di G' *perpendicolare* alla direzione di R. Si chiami Q la prima parte, e φ l'angolo che la direzione dell'asse di G' fa con quella di R; allora $\operatorname{sen}\varphi = \frac{Q}{G'}$, e questo è costante se è tale G', cioè, *per ogni punto sulla superficie del cilindro nell'Articolo precedente.*

98. Le proposizioni già date in questo Capitolo ammettono altri modi di dimostrazione, che procediamo ad indicare.

Mostrare che ogni sistema di forze si può sempre ridurre ad una forza e ad una coppia, l'asse dell'ultima essendo parallelo alla direzione della prima.

Le forze si possono sempre ridurre ad una forza R e ad una coppia G, e l'angolo φ tra la prima e l'asse dell'ultima è dato dall'equazione

$$\cos\varphi = \frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{G \cdot R}.$$

Si risolva la coppia G in due altre; l'una avendo il suo asse *parallelo* alla direzione di R ed il suo momento eguale a $G\cos\varphi$ l'altra avendo il suo asse *perpendicolare* alla direzione di R ed il suo momento eguale a $G\,\mathrm{sen}\,\varphi$. Le forze dell'ultima coppia sono perciò in un piano parallelo ad R; situando convenientemente questa coppia nel proprio piano, e facendo ciascuna delle sue forze eguale ad R, una delle sue forze si può fare che bilanci la forza R. Avremo allora che rimane la coppia $G\cos\varphi$ ed una forza R, la direzione della quale è parallela all'asse della coppia, e che è trasportata alla distanza $\frac{G\,\mathrm{sen}\,\varphi}{R}$ dalla sua posizione primitiva. Il sistema è così ridotto ad una forza R e ad una coppia $\frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{R}$, l'asse dell'ultima essendo parallelo ad R, e quindi il suo piano perpendicolare ad R.

Poichè la coppia risultante deve essere indipendente dalla direzione degli assi delle coordinate concludiamo che

$$\frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{R}$$

deve essere costante qualunque sia la direzione degli assi; e siccome R è costante ne segue che $L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z$ deve essere costante qualunque sia la direzione degli assi. L'espressione rimane ancora la stessa qualunque sia *l'origine* scelta, come apparisce dall'equazione (2) dell'Art. 93.

99. *Quando un sistema di forze è ridotto ad una forza e ad una coppia in un piano perpendicolare alla forza, la posizione e la grandezza della forza sono sempre le stesse.*

La *grandezza* della forza è sempre la stessa, poichè essa è la risultante delle forze date supponendo ciascuna di esse trasportata parallelamente a sè stessa finchè tutte agiscano nello stesso punto. Mostreremo ora che vi è una determinata linea retta lungo la quale la risultante deve agire.

Siano x', y', z' le coordinate di un'origine tale che l'asse della coppia risultante coincida con la direzione della forza risultante. Allora, con la notazione dell'Art. 93, abbiamo

$$\frac{L'}{\Sigma X}=\frac{M'}{\Sigma Y}=\frac{N'}{\Sigma Z},$$

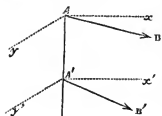
poichè i coseni di direzione dell'asse della coppia sono proporzionali ad L', M', ed N', e quelli della direzione della forza sono proporzionali a ΣX, ΣY, ΣZ. Quindi il luogo delle origini è la linea retta determinata dalle equazioni (5) dell'Art. 93.

100. Apparisce dall'ultimo Articolo che vi è solamente *una* posizione della forza risultante in cui essa è perpendicolare al piano della coppia risultante. Se vogliamo trasferire la risultante ad un altro punto qualunque, possiamo farlo introducendo due forze, R e $-R$, in quel punto; l'ultima con la forza primitiva R formerà una coppia; e se questa coppia si compone con la coppia primitiva abbiamo una nuova coppia, il momento della quale è $\sqrt{(K^2+R^2p^2)}$, dove K dinota il momento primitivo e p la distanza alla quale R è stata trasferita. Questo momento è maggiore di K; e quindi la linea retta nella quale R agisce quando è perpendicolare al piano della coppia risultante è *l'asse del minimo momento principale*. Essa è perciò *l'asse centrale*.

K si è mostrato nell'Art. 98 essere $=\dfrac{L\Sigma X+M\Sigma Y+N\Sigma Z}{R}$.

101. Il momento principale sarà lo stesso per ogni punto dell'asse centrale, poichè quando abbiamo ridotto le forze ad una sola forza e ad una coppia in un piano perpendicolare alla forza, la forza si può supporre agire in un punto qualunque della sua linea di applicazione, ed il piano della coppia si può muovere parallelamente a sè stesso sino ad una nuova posizione qualunque. Si vegga ancora l'Art. 95. Quindi se tiriamo un piano qualunque perpendicolare all'asse centrale, e descriviamo un cerchio nel piano col raggio p, avendo il suo centro nell'intersezione con l'asse centrale, allora, per l'ultimo Articolo, il momento principale per ogni punto in questo cerchio sarà $\sqrt{(K^2+R^2p^2)}$, e l'angolo φ secondo il quale la direzione del suo asse è inclinata alla direzione di R è dato dall'equazione $\tan\varphi=\dfrac{Rp}{K}$.

102. *Quando un sistema di forze agenti su di un corpo rigido è ridotto a due forze, e queste sono rappresentate da due linee rette che non s'incontrano e non sono parallele, il volume del tetraedro di cui le due linee rette sono spigoli opposti è costante.*

Rappresentino le linee rette AB ed $A'B'$ le due forze, AA' essendo una linea retta perpendicolare ad entrambe. Si suppongano tirate due linee parallele Ax, $A'x'$, ciascuna ad angoli retti ad AA', ed Ay, $A'y'$, rispettivamente ad angoli retti ad Ax, $A'x'$, ed anche ad angoli retti ad AA'. Sia $BAx=\varphi$, $B'A'x'=\varphi'$, e dinotino T e T' le intensità delle forze in AB ed $A'B'$ rispettivamente. Allora T si può risolvere in $T\cos\varphi$ e $T\operatorname{sen}\varphi$ agenti in A secondo Ax ed Ay rispettivamente, e T' in $T'\cos\varphi'$, $T'\operatorname{sen}\varphi'$ agenti in A' secondo $A'x'$ ed $A'y'$ rispettivamente. Sia α l'inclinazione di AB ed $A'B'$, sicchè $\varphi'=\varphi+\alpha$. Ora si determini φ dall'equazione

$$T\cos\varphi + T'\cos\varphi' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

cioè
$$T\cos\varphi + T'\cos(\varphi+\alpha) = 0.$$

Allora per (1) le forze $T\cos\varphi$ e $T'\cos\varphi'$ *formeranno una coppia* nel piano $xAA'x'$; e $T\operatorname{sen}\varphi$ e $T'\operatorname{sen}\varphi'$ avranno una sola risultante perpendicolare al piano di questa coppia, infatti esse non possono formare una coppia poichè allora l'intero sistema delle forze si ridurrebbe ad una sola coppia il che è contrario alla supposizione. Dinoti P l'intensità di questa forza unica sicchè

$$P = T\operatorname{sen}\varphi + T'\operatorname{sen}\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

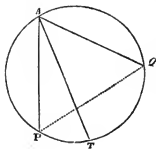
Il momento della coppia è $AA'\times T\cos\varphi$. Quindi, per l'ultima parte dell'Art. 98, $AA'\times P\times T\cos\varphi$ è costante qualunque sia la posizione e la grandezza delle forze T e T', finchè esse sono equivalenti al dato sistema di forze.

Ora il volume del tetraedro di cui AB ed $A'B'$ sono spigoli opposti è $\frac{1}{6}AB\cdot A'B'\cdot AA'\operatorname{sen}\alpha$. Infatti si può considerare per base il triangolo $AA'B'$, l'area del quale è $\frac{1}{2}AA'\cdot A'B'$; e l'altezza sarà allora $AB\operatorname{sen}\alpha$.

Ma da (1) e (2) abbiamo $T\operatorname{sen}\alpha=P\cos\varphi$. Quindi il volume del tetraedro diviene $\frac{1}{6}AA'\cdot T\cdot P\cos\varphi$, che abbiamo appunto veduto essere costante.

Questo risultato è dovuto a Chasles; si vegga Möbius, *Lehrbuch der Statik*, I. 122.

103. Quando un sistema di forze *parallele* agenti su di un corpo rigido ha una sola risultante, quella risultante passa sempre per un punto fisso nel corpo qualunque sia la posizione del corpo. Quando un sistema *qualunque* di forze agisce su di un corpo rigido possiamo investigare le conseguenze del girare il corpo da una posizione in un'altra mentre le forze ritengono le loro direzioni primitive, o pure del girare le forze in modo tale da lasciare invariate le loro direzioni *relative* mentre il corpo rimane fisso. Daremo qui alcuni esempii dei teoremi generali che sono stati dimostrati su questo soggetto. Le forze si suppongono agire in punti fissi nel corpo.

104. Siano PA e QA le direzioni di due forze che giacciono in un piano, ed agiscono nei punti P e Q rispettivamente; TA la direzione della loro risultante. Supponiamo che le forze in PA, QA girino intorno ai punti P e Q rispettivamente per lo stesso angolo α verso la stessa direzione; siccome PA e QA comprenderanno lo stesso angolo come prima, il loro punto d'intersezione si muoverà sopra un circolo che passa per P e Q. E siccome le grandezze delle forze si suppongono invariate, la grandezza della risultante e gli angoli che essa fa con le componenti rimangono invariati. Quindi se T è l'intersezione della risultante e del cerchio primitivamente, avverrà sempre così, poichè gli archi PT e QT sono proporzionali agli angoli PAT e QAT; la risultante avrà perciò girato per l'angolo α intorno al punto T.

La stessa conclusione vale se invece di supporre che il corpo sia fisso e le forze girino, supponiamo che ciascuna forza rimanga parallela a sè stessa ed il corpo giri per un angolo qualunque intorno ad una perpendicolare al piano delle forze.

Il punto T pel quale passa sempre la risultante si può chiamare il *centro* delle forze che agiscono in P e Q. È evidente, in simil modo, che se una terza forza passa per un punto fisso S ed incontra la linea retta TA, possiamo trovare il *centro* delle forze in T ed S, cioè, il *centro* delle forze in P, Q ed S; e generalmente possiamo inferire che *ogni sistema di forze in un piano che è riducibile ad una sola risultante ha un centro;* o, in altri termini, se vi è un sistema di forze che agiscono in un piano ed hanno una sola risultante, e conosciamo la grandezza di ciascuna

forza, gli angoli che le direzioni delle forze fanno tra loro, ed un punto nella direzione di ciascuna, allora possiamo determinare la grandezza della risultante, l'angolo che la sua direzione fa con quelle delle forze componenti, ed un punto nella sua direzione.

105. Se un sistema di forze mantiene un corpo in equilibrio, e l'equilibrio sussiste ancora dopo che il corpo è stato girato per un *dato angolo qualunque* che non sia un multiplo di due angoli retti, intorno ad un asse qualunque, allora l'equilibrio sussisterà ancora quando il corpo gira intorno allo *stesso* asse per un *angolo qualunque*, le forze essendo supposte agire con la stessa intensità ed in direzioni parallele.

Si faccia coincidere l'asse delle z con la linea retta intorno alla quale gira il corpo. Poichè vi è equilibrio nella sua prima posizione, abbiamo

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0 \ldots (2).$$

Se l'equilibrio sussiste quando il corpo si fa girare per un angolo θ, le equazioni (1) e (2) debbono sussistere quando poniamo $x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$ per x, ed $x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$ per y. Quindi (2) diviene

$$\mathrm{sen}\,\theta\,\Sigma(Zx) + \cos\theta\,\Sigma(Zy) - \Sigma(Yz) = 0 \ldots\ldots\ (3),$$

$$\Sigma(Xz) - \cos\theta\,\Sigma(Zx) + \mathrm{sen}\,\theta\,\Sigma(Zy) = 0 \ldots\ldots\ (4),$$

$$\cos\theta\,\Sigma(Yx - Xy) - \mathrm{sen}\,\theta\,\Sigma(Xx + Yy) = 0 \ldots\ldots\ (5).$$

Per mezzo di (2), le equazioni (3) e (4) diventano

$$\mathrm{sen}\,\theta\,\Sigma(Xz) - (1 - \cos\theta)\,\Sigma(Yz) = 0,$$

$$(1 - \cos\theta)\,\Sigma(Xz) + \mathrm{sen}\,\theta\,\Sigma(Yz) = 0.$$

Siccome queste equazioni reggono per un valore di $\mathrm{sen}\,\theta$ diverso da zero dobbiamo avere

$$\Sigma(Xz) = 0, \quad \text{e} \quad \Sigma(Yz) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6).$$

Allora, da (2), deduciamo

$$\Sigma(Zx) = 0, \quad \text{e} \quad \Sigma(Zy) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7).$$

E da (2) e (5),

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0, \quad \text{e} \quad \Sigma(Xx + Yy) = 0 \ldots\ldots\ (8).$$

E quando (6), (7), ed (8) sono vere, (3), (4), e (5) sono vere per *tutti* i valori di θ.

Apparisce dalla ricerca precedente che quando delle forze agiscono *in un piano* su di un corpo solido e mantengono l'equili-

brio, la condizione addizionale necessaria e sufficiente affinchè l'equilibrio sussista dopo che il corpo si è fatto girare intorno ad un asse perpendicolare al piano mentre le forze rimangono parallele alle loro direzioni primitive, è

$$\Sigma (Xx + Yy) = 0.$$

106. Un sistema di forze agisce su di un corpo rigido: determinare le condizioni che debbono aver luogo affinchè quando il sistema si risolve parallelamente ad una linea retta qualunque queste parti risolute siano in equilibrio.

Si prenda una linea retta di cui i coseni di direzione sono l, m, n. Affinchè le parti risolute delle forze parallele a questa linea retta siano in equilibrio dobbiamo avere, per l'Art. 78,

$$\Sigma (lX + mY + nZ) = 0,$$

$$\frac{\Sigma (lX + mY + nZ) x}{l} = \frac{\Sigma (lX + mY + nZ) y}{m} = \frac{\Sigma (lX + mY + nZ) z}{n}.$$

E siccome queste debbono essere vere per tutti i rapporti di l, m, n dobbiamo avere

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma Xy = 0, \quad \Sigma Xz = 0, \quad \Sigma Yx = 0, \quad \Sigma Yz = 0, \quad \Sigma Zx = 0, \quad \Sigma Zy = 0,$$

$$\Sigma Xx = \Sigma Yy = \Sigma Zz.$$

Queste sono le condizioni necessarie e sufficienti.

ESEMPII DIVERSI.

1. Determinare l'asse centrale quando vi sono due forze P e Q le di cui linee di azione sono definite da $z = c$, $y = x \tan \alpha$, e $z = -c$, $y = -x \tan \alpha$ rispettivamente.

2. Se P e Q sono due forze le di cui direzioni sono ad angoli retti, mostrare che le distanze dell'asse centrale dalle loro linee d'azione stanno come P^2 a Q^2.

3. Delle forze parallele agiscono su di un corpo rigido e lo mantengono in equilibrio, i punti di applicazione essendo tutti in un piano: mostrare che le forze manterranno il corpo in equilibrio comunque esse girino intorno ai loro punti di applicazione.

4. Un sistema di forze agenti su di un corpo rigido è equivalente ad una sola forza: mostrare che esso sarà anche equiva-

lente ad una sola forza dopo che il corpo si è fatto girare per un angolo qualunque intorno l'asse delle z, le direzioni delle forze rimanendo le stesse, se

$$\Sigma(X)\,\Sigma(Yz) = \Sigma(Y)\,\Sigma(Xz),$$

e $$\Sigma(X)\,\Sigma(Zx) + \Sigma(Y)\,\Sigma(Zy) = \Sigma(Z)\,\Sigma(Xx + Yy).$$

5. Delle forze agiscono nei vertici di un tetraedro in direzioni rispettivamente perpendicolari alle facce opposte, e proporzionali alle aree delle facce in grandezza: mostrare che le forze hanno la proprietà considerata nell'Art. 106.

6. Mostrare che dentro di un quadrilatero, che non ha due lati paralleli, non vi è che un solo punto, nel quale le forze agenti verso i vertici e proporzionali alle distanze del punto da essi, possano essere in equilibrio.

7. Due forze agenti in un punto sono rappresentate in grandezza e direzione da linee rette condotte da quel punto: la loro somma è costante e la loro risultante è costante in grandezza ed in direzione. Trovare il luogo delle estremità delle linee rette che rappresentano le forze.

8. Se le forze P, Q, R agenti nel centro O di una lamina circolare secondo i raggi OA, OB, OC sono equivalenti alle forze P', Q', R' agenti secondo i lati BC, CA, AB del triangolo iscritto, mostrare che

$$\frac{P \cdot P'}{BC} + \frac{Q \cdot Q'}{CA} + \frac{R \cdot R'}{AB} = 0.$$

9. Una verga rigida uniforme, di lunghezza $2a$, può girare in un piano orizzontale intorno al suo punto medio. In una estremità è legata una fune che passa sopra una carrucola fissa, verticalmente al di sopra di quella estremità, e ad una distanza b da essa, ed è poi legata ad un dato peso. La verga si fa allora girare per un angolo θ, ed è mantenuta in equilibrio in quella posizione per mezzo di una forza orizzontale P perpendicolare alla verga nell'altra sua estremità. Dimostrare che P sarà un massimo se

$$\tan^4 \frac{\theta}{2} = \frac{b^2}{b^2 + 4a^2}.$$

10. Dimostrare che un sistema di forze si può ridurre in infiniti modi ad una coppia di forze eguali, di cui le direzioni comprendano tra loro un angolo assegnato qualunque; e trovare la distanza fra queste forze quando l'angolo è dato.

CAPITOLO VIII.

Centro di Gravità.

107. Il peso si misura come le altre quantità per mezzo di una unità arbitraria. Se una certa forza diretta in su è necessaria per impedire la caduta di un corpo, allora un altro corpo che richiede una eguale forza per essere sostenuto si dice di avere un peso eguale a quello del primo. Quando due pesi sono stati riconosciuti eguali, un corpo che richiede per essere sostenuto una forza eguale alla somma delle due forze eguali che sosterrebbero i due pesi eguali, si dice di avere un peso *doppio* di quello di ciascuno dei due pesi eguali; e così di seguito.

Apparisce dall'esperimento che il peso di un dato corpo è invariabile finchè il corpo rimane nello stesso luogo sulla superficie della terra, ma cambia quando il corpo si trasporta altrove. Supporremo perciò quando si parla del peso di un corpo che il corpo rimanga in un determinato luogo.

Quando un corpo è tale che il peso di una sua porzione qualunque è proporzionale al volume di quella porzione esso si dice essere di *densità uniforme;* la densità di un tal corpo è misurata dal rapporto che il peso di un volume qualunque di esso serba al peso di un egual volume di un altro corpo scelto arbitrariamente, di uniforme densità.

Il prodotto della densità di un corpo pel suo volume si dice la sua *massa*.

Quando un corpo non è di uniforme densità la sua densità in un punto si misura così: si trovi il rapporto del peso di un volume del corpo preso in modo da includere quel punto al peso di un egual volume del corpo di paragone; il *limite* di questo rapporto, quando il volume diminuisce indefinitamente, è la densità del corpo nel punto che si considera.

108. Si dimostrò nell'Art. 66 che vi è un punto in ogni corpo tale che, se gli elementi del corpo siano sollecitati da forze parallele e questo punto sia fisso, il corpo resterà in equilibrio in qualunque posizione.

Ora il peso di un corpo si può considerare come la risultante dei pesi delle diverse porzioni elementari del corpo, agenti in linee parallele e verticali. In questo caso il punto sopra descritto come il centro di forze parallele si chiama il *centro di gravità del corpo*. Possiamo definire il centro di gravità di un sistema qua-

lunque di elementi pesanti come un punto tale che se è sostenuto e gli elementi sono con esso rigidamente connessi, il sistema starà in equilibrio in ogni posizione.

109. In questo Capitolo determineremo la posizione del centro di gravità in corpi di varie forme. Daremo prima alcuni pochi esempii elementari.

(1) *Dati i centri di gravità di due parti che compongono un corpo, trovare il centro di gravità dell'intero corpo.*

Dinoti G_1 il centro di gravità di una parte, e G_2 il centro di gravità dell'altra parte; sia m_1 la massa della prima parte, ed m_2 la massa della seconda parte. Si congiunga $G_1 G_2$ e si divida in G in modo che $\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{m_2}{m_1}$, allora G è il centro di gravità dell'intero corpo (Art. 37).

(2) *Dato il centro di gravità di un corpo ed anche il centro di gravità di una parte del corpo, trovare il centro di gravità della parte rimanente.*

Dinoti G il centro di gravità del corpo, e G_1 il centro di gravità di una parte del corpo; sia m la massa del corpo, ed m_1 la massa della parte. Si congiunga $G_1 G$ e si prolunghi per G in G_2, in modo che sia $\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{m_1}{m - m_1}$, allora G_2 è il centro di gravità della rimanente parte.

(3) *Trovare il centro di gravità di una figura triangolare di uniforme spessezza e densità.*

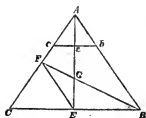
Sia ABC una superficie della figura triangolare; si divida per metà BC in E; si congiunga AE; si tiri ceb parallela a CEB che taglia AE in e. Allora, per i triangoli simili,

$$ce : CE :: Ae : AE,$$

e $$be : BE :: Ae : AE,$$

quindi $$ce : CE :: be : BE;$$

ma $CE = BE$, onde $ce = be$.

Quindi AE biseca ogni linea retta parallela a BC. Perciò ciascuna delle strisce simili a ceb, nelle quali possiamo supporre diviso il triangolo, starà in equilibrio sopra AE, e quindi il centro di gravità deve trovarsi nella linea retta AE.

Si divida per metà AC in F e si congiunga BF; questa interseghi AE in G. Allora, come sopra, il centro di gravità deve trovarsi in BF; ma esso deve trovarsi in AE; quindi G è il centro di gravità.

Si congiunga EF. Allora, essendo $CE=BE$ e $CF=AF$, EF è parallela ad AB ed $AB=2FE$; e per i triangoli simili,

$$EG : EF :: AG : AB, \quad \text{quindi} \quad EG = \frac{1}{2} AG.$$

Quindi per trovare il centro di gravità di un triangolo, si divida per metà un lato qualunque, si unisca il punto di divisione col vertice opposto, ed il centro di gravità cade ad un terzo su questa linea congiungente.

Il centro di gravità di un poligono piano qualunque si può trovare dividendolo in triangoli, determinando il centro di gravità di ciascun triangolo, e quindi con l'Art. 66 deducendo il centro di gravità dell'intera figura.

Possiamo osservare che il centro di gravità di un triangolo coincide col centro di gravità di tre elementi *eguali* situati nei vertici del triangolo. Infatti per trovare il centro di gravità di tre elementi eguali situati in A, B, C rispettivamente, congiungiamo CB e la dividiamo per metà in E; allora E è il centro di gravità degli elementi in C e B; si suppongano questi elementi riuniti in E; allora si congiunga AE e si divida AE in G in modo che EG stia ad AG come la massa dell'elemento in A sta a quella dei due in E, cioè, come 1 a 2; allora G è il centro di gravità dei tre elementi eguali. Dalla costruzione G è evidentemente anche il centro di gravità del triangolo ABC.

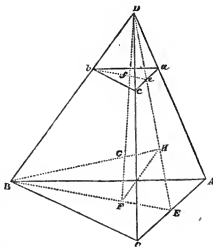
Siano le coordinate di A riferite ad assi qualunque x_1, y_1, z_1; quelle di B, x_2, y_2, z_2; e quelle di C, x_3, y_3, z_3; allora, per l'Art. 66, le coordinate x', y', z' del centro di gravità di tre elementi eguali situati in A, B, C rispettivamente, sono

$$x' = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3); \quad y' = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3); \quad z' = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3).$$

Per quello che è stato ora dimostrato, queste sono anche le coordinate del centro di gravità del *triangolo* ABC.

Si può osservare che nell'Art. 66 le coordinate possono essere *rettangolari o oblique*.

(4) *Trovare il centro di gravità di una piramide a base triangolare.*

Sia ABC la base, e D il vertice; si divida AC per metà in E; si congiungano BE, DE; si prenda $EF = \frac{1}{3} EB$, allora F è il centro di gravità di ABC. Si congiunga FD; si tirino ab, bc, ca

parallele ad AB, BC, CA rispettivamente, e DF incontri il piano abc in f; si congiunga bf e si prolunghi sino ad incontrare DE in e. Allora, per i triangoli simili, $ae=ec$; inoltre

$$\frac{bf}{BF} = \frac{Df}{DF} = \frac{ef}{EF};$$

$$\text{ma} \quad EF = \frac{1}{2} BF, \quad \text{quindi} \quad ef = \frac{1}{2} bf;$$

quindi f è il centro di gravità del triangolo abc; e se supponiamo formata la piramide da un numero infinitamente grande di strati triangolari infinitamente sottili paralleli alla base, ciascuno di questi strati ha il suo centro di gravità in DF. Quindi il centro di gravità della piramide è in DF.

Ancora, si prenda $EH = \frac{1}{3} ED$; si congiunga HB che taglia DF in G. Allora, come sopra, il centro di gravità della piramide deve essere in BH; ma esso è in DF; quindi G, punto d'intersezione di queste linee rette, è il centro di gravità.

Si congiunga FH; allora FH è parallela a DB. Inoltre essendo $EF = \frac{1}{3} EB$, sarà $FH = \frac{1}{3} DB$, ed

$$\frac{FG}{FH} = \frac{DG}{DB}; \quad \text{ma} \quad FH = \frac{1}{3} DB, \quad \text{quindi} \quad FG = \frac{1}{3} DG = \frac{1}{4} DF.$$

Quindi il centro di gravità è ad un quarto della linea retta che congiunge il centro di gravità della base col vertice.

Nello stesso modo nel quale si dimostrarono i corrispondenti risultati pel triangolo, possiamo stabilire quanto segue:

Il centro di gravità di una piramide coincide col centro di gravità di elementi di masse eguali situati nei vertici della piramide.

Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate di un vertice; x_2, y_2, z_2 le coordinate di un altro; e così di seguito; siano x', y', z' le coordinate del centro di gravità della piramide: allora

$$x' = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

$$y' = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$

$$z' = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4).$$

(5) *Trovare il centro di gravità di una piramide qualunque a base piana.*

Si divida la base in triangoli; se qualche parte della base è curvilinea allora si supponga divisa la curva in un numero infinitamente grande di linee rette infinitamente piccole. Si congiunga il vertice della piramide con i centri di gravità di tutti i triangoli, ed anche con tutti i loro angoli. Si tiri un piano parallelo alla base ad una distanza dalla base eguale ad un quarto della distanza del vertice dalla base; allora questo piano sega ogni linea retta condotta dal vertice alla base in parti che hanno lo stesso rapporto di 3 ad 1; e quindi le piramidi triangolari hanno i loro centri di gravità in questo piano, e quindi l'intera piramide ha il suo centro di gravità in questo piano.

Ancora, si congiunga il vertice col centro di gravità della base; allora ogni sezione parallela alla base sarà simile alla base, e se supponiamo divisa la piramide in un numero infinitamente grande di strati infinitamente sottili con piani paralleli alla base, il centro di gravità di ciascun strato si troverà sulla linea retta

che congiunge il vertice col centro di gravità della base. Quindi l'intera piramide ha il suo centro di gravità in questa linea retta.

Quindi il centro di gravità è ad un quarto della linea retta che congiunge il centro di gravità della base col vertice.

(6) *Trovare il centro di gravità del tronco di una piramide formato da piani paralleli.*

Sia $ABCabc$ il tronco; siano G,g i centri di gravità delle piramidi $DABC$, $Dabc$; è chiaro che il centro di gravità del tronco deve essere in gG prolungata; supponiamolo in G'.

Sia $Ff=c$, $AB=a$, $ab=b$.

Poichè l'intera piramide $DABC$ è formata dal tronco e dalla piccola piramide, perciò,

$$\frac{GG'}{Gg}=\frac{\text{peso della piccola piramide}}{\text{peso del tronco}}$$

$$=\frac{\text{vol. della piccola pir.}}{\text{vol. della gr. pir.}-\text{vol. della pic. pir.}}$$

$$=\frac{b^3}{a^3-b^3},$$

poichè i solidi simili stanno come i cubi dei loro lati omologhi;

e $$Gg=DG-Dg=\frac{3}{4}(DF-Df)=\frac{3}{4}c\,;$$

quindi $$GG'=\frac{3c}{4}\cdot\frac{b^3}{a^3-b^3}.$$

Inoltre $$GF=\frac{1}{4}DF=\frac{1}{4}(DF-Df)\frac{a}{a-b}\text{ per le figure simili,}$$

$$=\frac{c}{4}\cdot\frac{a}{a-b};$$

quindi $$FG'=FG-G'G=\frac{c}{4}\left\{\frac{a}{a-b}-\frac{3b^3}{a^3-b^3}\right\}$$

$$=\frac{c}{4}\,\frac{a^2+2ab+3b^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Questo è vero per un tronco di una piramide a base qualunque, a e b essendo lati omologhi delle due basi.

(7) Possiamo per mezzo della teoria del centro di gravità dimostrare alcune proposizioni geometriche. Per esempio: *le linee rette che congiungono i punti medii degli spigoli opposti di un tetraedro concorrono in un punto che divide per metà ciascuna linea retta.*

Infatti si suppongano degli elementi eguali situati nei vertici di un tetraedro; allora per trovare il centro di gravità del sistema possiamo procedere così: Il centro di gravità di una coppia qualunque di elementi è nel punto medio dello spigolo che li congiunge; ed il centro di gravità dell' altra coppia è nel punto medio dello spigolo opposto: allora il centro di gravità del sistema è nel punto medio della linea retta che congiunge i punti medii degli spigoli scelti. E si otterrà naturalmente lo stesso punto per il centro di gravità del sistema, qualunque coppia di spigoli si scelga. Quindi si ottiene il risultato richiesto.

(8) *Ai vertici di un tetraedro sono situati degli elementi, la massa di ciascun elemento essendo proporzionale all' area della faccia opposta: mostrare che il centro di gravità del sistema coincide col centro della sfera inscritta nel tetraedro.*

Siano A, B, C, D i vertici del tetraedro. Sia p la perpendicolare da D sulla faccia ABC. Allora la distanza del centro di gravità del sistema dal piano ABC

$$= \frac{p \times \text{area della faccia } ABC}{\text{somma delle aree delle facce}}$$

$$= \frac{3 \times \text{volume del tetraedro}}{\text{somma delle aree delle facce}}.$$

E questa espressione è eguale al raggio della sfera inscritta nel tetraedro.

Quindi il risultato richiesto è ottenuto.

(9) *Un poliedro è circoscritto ad una sfera; nei punti di contatto sono situate delle masse proporzionali alle aree delle facce corrispondenti del poliedro: mostrare che il centro di gravità di queste masse coincide col centro della sfera.*

Si prenda il centro della sfera per origine, ed un piano qualunque per l' origine per piano delle (x,y).

Dinotino $A_1, A_2, A_3, \ldots$ le aree delle facce del poliedro, siano $z_1, z_2, z_3, \ldots$ le ordinate dei punti di contatto; z' l' ordinata del centro di gravità. Allora, per l' Art. 66,

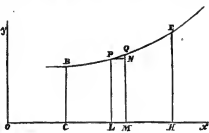
$$z' = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + \ldots}{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots}.$$

Ora la proiezione dell'area A_1 sul piano delle (x,y) è $\frac{A_1 z_1}{r_1}$, in cui r_1 è il raggio della sfera; e similmente per le altre proiezioni. E la somma di tali proiezioni è zero. Così $z'=0$; e siccome il piano delle (x,y) è un piano qualunque condotto pel centro della sfera, il centro di gravità deve coincidere col centro della sfera.

Passiamo ora ai calcoli analitici.

110. In tutti i casi in cui s'impiega il Calcolo integrale per determinare il centro di gravità di un corpo il principio è lo stesso; il corpo si divide in un numero infinitamente grande di elementi infinitamente piccoli; si valuta il volume di un elemento, e moltiplicandolo per la densità si ha la massa dell'elemento. Si moltiplica la massa per l'ascissa dell'elemento, e troviamo la somma dei valori di questo prodotto per tutti gli elementi; il risultato corrisponde al ΣPx dell'Art. 66. Inoltre troviamo la somma delle masse di tutti gli elementi e così otteniamo un risultato corrispondente al ΣP dello stesso Articolo. Si divide il primo risultato per il secondo ed abbiamo il valore di x'; similmente si possono trovare y' e z'.

Area piana.

111. Sia $CBEH$ un'area limitata dalle ordinate BC ed EH, la curva BE, e la porzione CH dell'asse delle x; si vuol trovare il centro di gravità dell'area. O pure in vece che dell'area possiamo domandare il centro di gravità di un solido limitato da due piani paralleli al piano della figura ed equidistanti da esso, e da una linea retta che si muove lungo il contorno $CBEH$ rimanendo sempre perpendicolare al piano della figura. Si divida CH in n porzioni e si suppongano tirate le ordinate nei punti di divisione. Rappresentino LP ed MQ due ordinate consecutive, e si tiri PN parallela ad LM.

Sia $OL=x$, $LP=y$, $LM=\Delta x$, $OC=c$, $OH=h$.

L'area del rettangolo PM è $y\Delta x$; supponiamo che u dinoti l'area di PQN, e sia x_1 l'ascissa del centro di gravità dell'area

PQML. Allora se k dinota la spessezza del solido e ρ la sua densità, $k\rho(y\Delta x+u)$ è la massa dell'elemento *PQML*. Quindi, se x' è l'ascissa del centro di gravità dell'intera figura *CBEH*, per l'Art. 66,

$$x' = \frac{\Sigma k\rho x_1(y\Delta x + u)}{\Sigma k\rho(y\Delta x + u)} = \frac{\Sigma x_1(y\Delta x + u)}{\Sigma(y\Delta x + u)},$$

supponendo uniforme la spessezza e la densità. La somma deve includere tutte le figure come *PQML*, che sono comprese in *CBEH*.

Ora supponiamo che u cresca senza limite, e ciascuna delle porzioni *LM* diminuisca senza limite; allora il termine Σu nel denominatore di x' svanisce; poichè esso esprime la somma di tutte le figure come *PQN*, ed è perciò minore di un rettangolo che ha per larghezza Δx e per altezza la massima ordinata compresa tra *CB* ed *HE*. Ancora il termine $\Sigma x_1 u$ nel numeratore di x' svanisce, poichè esso è minore del prodotto $h\Sigma u$, e come abbiamo ora mostrato, questo nel limite svanisce. Quindi l'espressione di x' diviene, quando il numero delle divisioni si accresce indefinitamente e ciascun termine si diminuisce indefinitamente,

$$\frac{\Sigma x_1 y\Delta x}{\Sigma y\Delta x}.$$

Inoltre, x_1 deve cadere tra x ed $x+\Delta x$: supponiamolo eguale ad $x+v$, dove v è minore di Δx; allora il numeratore di x' si può scrivere

$$\Sigma xy\Delta x + \Sigma vy\Delta x;$$

e siccome l'ultimo termine non può essere tanto grande quanto $\Delta x\Sigma y\Delta x$, esso nel limite sparisce. Quindi abbiamo

$$x' = \frac{\Sigma xy\,\Delta x}{\Sigma y\,\Delta x};$$

cioè, la formola precedente darà il valore esatto di x' *quando accresciamo il numero delle divisioni indefinitamente e diminuiamo ciascun termine indefinitamente, ed estendiamo la somma sullo spazio* CBEH. Questo si esprimerà secondo l'ordinaria notazione del Calcolo integrale così,

$$x' = \frac{\int_c^h xydx}{\int_c^h ydx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Nello stesso modo possiamo mostrare che

$$y' = \frac{\int_c^h y_1 \, y dx}{\int_c^h y dx},$$

dove y_1 è il valore limite dell'ordinata del centro di gravità dell'elemento $PQML$ quando la sua larghezza diminuisce indefinitamente; y_1 è quindi $= \frac{1}{2} y$; quindi

$$y' = \frac{\frac{1}{2}\int_c^h y^2 dx}{\int_c^h y dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Dobbiamo ora solamente sostituire in (1) e (2) per y il suo valore in x, e poi effettuare l'integrazione con i metodi ordinarii.

112. Non sarà necessario per lo studente nel risolvere un esempio di ripetere tutto il procedimento precedente. Quando egli comprende in che modo si può dare la necessaria esattezza, se richiesta, egli può procedere brevemente così. La figura $PQML = y\Delta x$ ultimamente, e le coordinate del suo centro di gravità sono x ed $\frac{1}{2} y$ ultimamente. Quindi

$$x' = \frac{\int xy dx}{\int y dx} \quad \text{ed} \quad y' = \frac{\int \frac{1}{2} y^2 dx}{\int y dx},$$

le integrazioni essendo prese tra i limiti convenienti.

113. A meno che non si indichi il contrario, supporremo da ora innanzi che i corpi presi a considerare siano di *uniforme densità*, e perciò non introdurremo alcun fattore per rappresentare la densità, poichè, come nell'Articolo 111 il fattore sparirà.

114. Es. 1. Sia la curva una parabola di cui l'equazione è

$$y = 2\sqrt{(ax)}.$$

$$\text{Qui } x' = \frac{\int_c^h yx dx}{\int_c^h y dx} = \frac{\int_c^h 2\sqrt{(ax)}x dx}{\int_c^h 2\sqrt{(ax)} dx} = \frac{\int_c^h x^{\frac{3}{2}} dx}{\int_c^h x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\frac{2}{5}\left(h^{\frac{5}{2}} - c^{\frac{5}{2}}\right)}{\frac{2}{3}\left(h^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{3}{2}}\right)}.$$

Se $c=0$, $x'=\frac{3}{5}h$, che determina l'ascissa del centro di gravità di una porzione di un'area parabolica che incomincia dal vertice. Inoltre

$$y'=\frac{\frac{1}{2}\int_c^h y^2\,dx}{\int_c^h y\,dx}=\frac{2a\int_c^h x\,dx}{2\sqrt{a}\int_c^h x^{\frac{1}{2}}\,dx}=\frac{\sqrt{a}\int_c^h x\,dx}{\int_c^h x^{\frac{1}{2}}dx}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{a}\,(h^2-c^2)}{\frac{2}{3}(h^{\frac{3}{2}}-c^{\frac{3}{2}})}.$$

Quando $c=0$, $y'=\frac{3}{4}\sqrt{(ah)}$.

Es. 2. Sia la curva un'ellisse di cui l'equazione è

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}.$$

Qui

$$x'=\frac{\int_c^h yx\,dx}{\int_c^h y\,dx}=\frac{\int_c^h \frac{bx}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx}{\int_c^h \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx}=\frac{\int_c^h x\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx}{\int_c^h \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(a^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{h\sqrt{(a^2-h^2)}-c\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}+\frac{a^2}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{h}{a}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{c}{a}\right)}.$$

Inoltre

$$y'=\frac{\int_c^h \frac{y^2}{2}\,dx}{\int_c^h y\,dx}=\frac{\frac{b}{2a}\int_c^h (a^2-x^2)\,dx}{\int_c^h \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx}$$

$$=\frac{\frac{b}{2a}\left\{a^2(h-c)-\frac{h^3-c^3}{3}\right\}}{\frac{h\sqrt{(a^2-h^2)}-c\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}+\frac{a^2}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{h}{a}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{c}{a}\right)}.$$

Se vogliamo il centro di gravità del quadrante dell'ellisse, dobbiamo porre $c=0$ ed $h=a$. Quindi

$$x'=\frac{4a}{3\pi},\qquad y'=\frac{4b}{3\pi}.$$

Es. 3. Sia la curva una cicloide di cui l'equazione è

$$y = \sqrt{(2ax - x^2)} + a \operatorname{vers}^{-1} \frac{x}{a};$$

e supponiamo che si voglia il centro di gravità della metà dell'area della curva; allora

$$x' = \frac{\int_0^{2a} yx dx}{\int_0^{2a} y dx}, \qquad y' = \frac{\int_0^{2a} y^2 dx}{\int_0^{2a} y dx}.$$

Ora
$$\int yx dx = \frac{yx^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{dy}{dx} dx$$
$$= \frac{yx^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \sqrt{\left(\frac{2a - x}{x}\right)} dx.$$

$$\int y dx = yx - \int x \frac{dy}{dx} dx$$
$$= yx - \int \sqrt{(2ax - x^2)} dx.$$

$$\int y^2 dx = y^2 x - 2\int yx \frac{dy}{dx} dx$$
$$= y^2 x - 2\int y \sqrt{(2ax - x^2)} dx.$$

Con ciò si troverà

$$x' = \frac{7}{6} a, \qquad y' = \frac{a}{3\pi} \left(\frac{3}{2} \pi^2 - \frac{8}{3}\right).$$

115. Se una curva ha un ramo al di sotto dell'asse delle x simmetrico con un ramo al di sopra dell'asse, e vogliamo il centro di gravità dell'area limitata dai due rami e dalle ordinate tirate alle distanze c ed h dall'origine, abbiamo

$$x' = \frac{2\int_c^h yx dx}{2\int_c^h y dx} = \frac{\int_c^h yx dx}{\int_c^h y dx},$$

ed
$$y' = 0.$$

116. Sinora abbiamo supposto gli assi *rettangolari*; se essi sono obliqui ed inclinati sotto un angolo ω, allora la figura

$PQML$ (si vegga la fig. nell'Art. 111) sarà $= \operatorname{sen}\omega y \Delta x$ ultimamente. Quindi le formole (1) e (2) dell'Art. 111 rimangono vere, poichè $\operatorname{sen}\omega$ si trova come fattore nel numeratore e nel denominatore, e si può perciò cancellare.

117. Alle volte è conveniente di adoperare formole polari. Supponiamo che si voglia il centro di gravità dell'area compresa tra un arco di curva e due raggi vettori condotti dal polo. Allora l'area elementare sarà ultimamente $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$, ed il suo centro di gravità si troverà ultimamente, come quello di un triangolo, sulla linea retta condotta dal polo al punto medio della corda della curva, e ad una distanza di due terzi di questa linea retta dal polo. Quindi l'ascissa e l'ordinata di questo centro di gravità saranno ultimamente

$$\frac{2}{3}r\cos\theta, \text{ e } \frac{2}{3}r\operatorname{sen}\theta \text{ rispettivamente.}$$

Quindi
$$x' = \frac{\int \frac{2}{3}r\cos\theta\,\frac{1}{2}r^2\,d\theta}{\int \frac{1}{2}r^2\,d\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int r^3\cos\theta\,d\theta}{\int r^2\,d\theta},$$

$$y' = \frac{\int \frac{2}{3}r\operatorname{sen}\theta\,\frac{1}{2}r^2\,d\theta}{\int \frac{1}{2}r^2\,d\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int r^3\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\int r^2\,d\theta}.$$

In queste formole dobbiamo porre per r il suo valore in termini di θ dato dall'equazione della curva; dobbiamo quindi integrare da $\theta=\alpha$ a $\theta=\beta$, supponendo che α e β siano gli angoli che i raggi vettori che terminano l'area fanno con l'asse polare.

Area piana. Doppia integrazione.

118. Vi è un altro metodo di dividere un'area piana in elementi. Si tiri una serie di linee rette parallele all'asse delle y ed un'altra serie di linee rette parallele all'asse delle x. Si consideri uno dei rettangoli formati da queste linee rette; e supponiamo che siano x ed y le coordinate del vertice più vicino all'origine, ed $x+\Delta x$ ed $y+\Delta y$ le coordinate del vertice opposto. Allora l'area del rettangolo è $\Delta x\Delta y$, e le coordinate del suo centro di gravità sono ultimamente x ed y. Quindi, per trovare l'ascissa del centro di gravità di un'area piana qualunque, possiamo pren-

dere la somma dei valori di $x\Delta x\Delta y$ per il numeratore, e la somma dei valori di $\Delta x\Delta y$ per il denominatore, Δx e Δy essendo diminuiti indefinitamente. Ciò si esprime così,

$$x' = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}.$$

Similmente

$$y' = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}.$$

119. Supponiamo, per esempio, che l'area sia limitata da due ordinate, e da due curve. Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione della curva superiore, ed $y=\psi(x)$ l'equazione della curva inferiore; siano c ed h le ascisse corrispondenti alle ordinate estreme. Allora la prima integrazione rispetto ad y dovrà estendersi tra i limiti $y=\psi(x)$ ed $y=\varphi(x)$, e la seconda integrazione rispetto ad x tra i limiti $x=c$ ed $x=h$. Si avrà così

$$x' = \frac{\int_c^h x\,\{\varphi(x) - \psi(x)\}\,dx}{\int_c^h \{\varphi(x) - \psi(x)\}\,dx}.$$

Similmente

$$y' = \frac{\frac{1}{2}\int_c^h [\{\varphi(x)\}^2 - \{\psi(x)\}^2]\,dx}{\int_c^h \{\varphi(x) - \psi(x)\}\,dx}.$$

120. Alle volte sarà più conveniente d'integrare le formole nell'Art. 118, *prima* rispetto ad x e poi rispetto ad y. Per esempio, se l'area data è compresa tra le linee rette $y=c'$, ed $y=h'$, e le curve $x=\psi(y)$, ed $x=\varphi(y)$, otteniamo

$$x' = \frac{\frac{1}{2}\int_{c'}^{h'} [\{\varphi(y)\}^2 - \{\psi(y)\}^2]\,dy}{\int_{c'}^{h'} \{\varphi(y) - \psi(y)\}\,dy},$$

$$y' = \frac{\int_{c'}^{h'} y\,\{\varphi(y) - \psi(y)\}\,dy}{\int_{c'}^{h'} \{\varphi(y) - \psi(y)\}\,dy}.$$

121. Daremo ora le formole polari con doppia integrazione.

Si tiri dal polo una serie di linee rette, e si descriva una serie di circoli che abbiano per centro il polo. Si consideri uno degli elementi quadrilateri formati con questo modo di dividere un'area piana; siano r e θ le coordinate polari del vertice più vicino al polo ed all'asse polare, $r+\Delta r$, e $\theta+\Delta\theta$ le coordinate del vertice opposto; allora l'area dell'elemento sarà ultimamente $r\Delta\theta\Delta r$, e l'ascissa e l'ordinata del suo centro di gravità saranno $r\cos\theta$ ed $r\,\text{sen}\,\theta$ rispettivamente. Quindi otteniamo

$$x' = \frac{\iint r\cos\theta\, r d\theta\, dr}{\iint r d\theta\, dr} = \frac{\iint r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr}{\iint r d\theta\, dr}.$$

Similmente

$$y' = \frac{\iint r^2 \,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, dr}{\iint r d\theta\, dr}.$$

Supponiamo che l'area sia limitata da due curve, e da due raggi vettori. Sia $r=\varphi(\theta)$ l'equazione della prima curva, $r=\psi(\theta)$ quella della seconda; e siano α e β gli angoli che i raggi vettori estremi fanno con l'asse polare. Allora la prima integrazione rispetto a θ deve estendersi tra i limiti $r=\psi(\theta)$ ed $r=\varphi(\theta)$, e la seconda integrazione rispetto a θ tra i limiti α e β. Si avrà così

$$x' = \frac{\frac{2}{3}\int_\alpha^\beta \cos\theta\,[\{\varphi(\theta)\}^3 - \{\psi(\theta)\}^3]\,d\theta}{\int_\alpha^\beta [\{\varphi(\theta)\}^2 - \{\psi(\theta)\}^2]\,d\theta}$$

Similmente,

$$y' = \frac{\frac{2}{3}\int_\alpha^\beta \text{sen}\,\theta\,[\{\varphi(\theta)\}^3 - \{\psi(\theta)\}^3]\,d\theta}{\int_\alpha^\beta [\{\varphi(\theta)\}^2 - \{\psi(\theta)\}^2]\,d\theta}.$$

122. Come un esempio cerchiamo il centro di gravità di un settore di circolo. Si prenda per polo il centro, e per asse polare uno dei raggi del settore; sia a il raggio e β l'angolo del settore.

Si avrà allora

$$x' = \frac{\int_0^a \int_0^\beta r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta}{\int_0^a \int_0^\beta r dr \, d\theta} = \frac{\operatorname{sen}\beta \int_0^a r^2 \, dr}{\beta \int_0^a r dr} = \frac{2a \operatorname{sen}\beta}{3\beta},$$

$$y' = \frac{\int_0^a \int_0^\beta r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta}{\int_0^a \int_0^\beta r dr \, d\theta} = \frac{(1-\cos\beta)\int_0^a r^2 \, dr}{\beta \int_0^a r dr} = \frac{2a(1-\cos\beta)}{3\beta}.$$

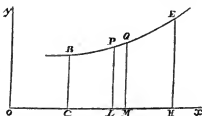
Per ottenere il risultato nella forma più semplice, possiamo procedere così; il centro di gravità deve trovarsi sulla linea retta che bisega l'angolo del settore. Quindi prendendo questa linea retta per la linea iniziale ed usando le coordinate polari, abbiamo $y'=0$, ed

$$x' = \frac{\int_0^a \int_{-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}\beta} r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta}{\int_0^a \int_{-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}\beta} r dr \, d\theta} = \frac{4a \operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta}{3\beta}.$$

Solido di rotazione.

123. Sia un solido generato dalla rotazione della curva $BPQE$ intorno l'asse delle x, e supponiamo che si voglia il centro di gravità di una porzione di esso compresa fra due piani perpendicolari all'asse di rotazione.

Siano le coordinate di un punto P della curva x ed y, e sia $x+\Delta x$ l'ascissa di un punto adiacente Q. Siccome la curva gira intorno all'asse delle x, l'area $PQML$ genererà un volume che è ultimamente eguale a $\pi y^2 \Delta x$. Inoltre l'ascissa del suo centro di gravità sarà x ultimamente. Quindi

$$x' = \frac{\int \pi y^2 x dx}{\int \pi y^2 dx} = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}.$$

Il centro di gravità del solido si trova evidentemente nella linea retta Ox, sicchè richiediamo solamente il valore di x' per determinarne la posizione.

124. Es. 1. Si cerchi il centro di gravità di una porzione di un paraboloide. Supponiamo $y^2=4ax$ l'equazione della parabola generatrice, e che il solido sia limitato dai piani distanti c ed h rispettivamente dall'origine; allora

$$x'=\frac{\int_c^h 4ax^2\,dx}{\int_c^h 4ax\,dx}=\frac{2}{3}\cdot\frac{h^3-c^3}{h^2-c^2}.$$

Se si pone $c=0$ troviamo per il centro di gravità di un segmento di paraboloide cominciando dal vertice

$$x'=\frac{2h}{3}.$$

Es. 2. Si cerchi il centro di gravità di una porzione di una sfera compresa fra due piani paralleli.

Sia $y^2=a^2-x^2$ l'equazione del circolo generatore;

$$x'=\frac{\int_c^h (a^2-x^2)\,xdx}{\int_c^h (a^2-x^2)\,dx}=\frac{\frac{1}{2}a^2(h^2-c^2)-\frac{1}{4}(h^4-c^4)}{a^2(h-c)-\frac{1}{3}(h^3-c^3)}.$$

Se si pone $c=0$ ed $h=a$, troviamo per il centro di gravità di un emisfero

$$x'=\frac{3}{8}a.$$

Es. 3. Trovare il centro di gravità del solido generato dalla rotazione della cicloide $y=\sqrt{(2ax-x^2)}+a\,\text{vers}^{-1}\frac{x}{a}$ intorno l'asse delle x.

Qui
$$x'=\frac{\int_0^{2a} y^2\,xdx}{\int_0^{2a} y^2\,dx}.$$

Eseguendo le integrazioni col porre $\text{vers}^{-1}\frac{x}{a}=\theta$, onde si ha $x=a(1-\cos\theta)$, si troverà

$$x'=\frac{(63\pi^2-64)\,a}{6(9\pi^2-16)}.$$

125. Se un solido di rotazione è formato col girare una curva intorno l'asse delle y, troviamo per la posizione del centro di gravità

$$y' = \frac{\int \pi x^2 y dy}{\int \pi x^2 dy} = \frac{\int x^2 y dy}{\int x^2 dy}.$$

Per esempio, la cicloide $y = \sqrt{(2ax - x^2)} + a \operatorname{vers}^{-1} \frac{x}{a}$, giri intorno l'asse delle y, e supponiamo che si voglia il centro di gravità del volume generato da quella metà della curva per la quale y è positiva. Qui

$$y' = \frac{\int_0^{\pi a} x^2 y dy}{\int_0^{\pi a} x^2 dy},$$

ed osservando che, nel presente caso, le integrazioni rispetto ad y tra i limiti 0 e πa corrispondono ad integrazioni rispetto ad x tra i limiti 0 e $2a$, si avrà

$$y' = \frac{\int_0^{2a} x^2 y \left(\frac{2a - x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^{2a} x^2 \left(\frac{2a - x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\int_0^{2a} yx \sqrt{(2ax - x^2)} dx}{\int_0^{2a} x \sqrt{(2ax - x^2)} dx}$$

$$= \left(\frac{16}{9} + \frac{\pi^2}{4}\right) \frac{2a}{\pi}.$$

126. Si può trovare anche conveniente in alcuni casi di adoperare formole con doppia integrazione.

Supponiamo che la figura immaginata nell'Art. 118 giri intorno l'asse delle x; siano x, y ed $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ le coordinate di due vertici opposti del rettangolo elementare $\Delta x \Delta y$. L'area di questo rettangolo genera con la rotazione un anello elementare, il volume del quale è $\pi(y + \Delta y)^2 \Delta x - \pi y^2 \Delta x$; questo si può ultimamente porre eguale a $2\pi y \Delta y \Delta x$. Il centro di gravità di questo anello è sull'asse delle x, e la sua ascissa è ultimamente x. Quindi procedendo come sopra avremo ultimamente

$$x' = \frac{\int_c^h \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} yx \, dx \, dy}{\int_c^h \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} y dx \, dy},$$

in cui $y=\psi(x)$ ed $y=\varphi(x)$ sono le equazioni delle curve limiti inferiore e superiore, e c ed h sono le ascisse dei piani che limitano il solido di rotazione perpendicolarmente al suo asse.

Similmente, se il solido è formato dal rotare l'area racchiusa tra due curve intorno all'asse delle y, avremo

$$y'=\frac{\int_{c'}^{h'}\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} xy\,dy\,dx}{\int_{c'}^{h'}\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} x dy\,dx}.$$

O pure possiamo usare formole polari. Supponiamo che la figura immaginata nell'Art. 121 giri intorno all'asse delle x; siano r,θ ed $r+\Delta r$, $\theta+\Delta\theta$ le coordinate polari di due vertici opposti del quadrilatero elementare $r\Delta\theta\Delta r$. Il volume dell'anello generato dalla rotazione dell'area di questo quadrilatero è ultimamente $2\pi r \operatorname{sen}\theta r\Delta r\Delta\theta$; e l'ascissa del centro di gravità dell'anello è ultimamente $r\cos\theta$. Quindi

$$x'=\frac{\iint r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\,dr}{\iint r^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,dr}.$$

Similmente se la figura gira intorno l'asse delle y

$$y'=\frac{\iint r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,dr}{\iint r^2 \cos\theta\,d\theta\,dr}.$$

Abbiamo finora supposto che il solido di rotazione sia di *uniforme* densità; se fosse altrimenti le formole dovrebbero modificarsi. Per esempio, si prenda la prima formola in questo Articolo; supponiamo che ρ dinoti la densità nel punto (x,y). Allora la massa dell'anello che si considera sarà ultimamente $2\pi\rho y\Delta y\Delta x$. Quindi

$$x'=\frac{\int_{c}^{h}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \rho yx\,dx\,dy}{\int_{c}^{h}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \rho y\,dx\,dy}.$$

E ρ essendo supposta una funzione nota di x ed y, le integrazioni non presentano alcuna difficoltà teoretica.

Similmente si può modificare la formola polare. Per esempio, invece della formola data precedentemente per x' otteniamo ora

$$x' = \frac{\iint \rho r^3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, d\theta \, dr}{\iint \rho r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, dr}.$$

In questo caso ρ deve essere esprimibile come una funzione di r e θ, affinchè le integrazioni siano praticabili. I casi più comuni sono due; nell'uno la densità dipende solamente dalla distanza da un punto fisso sull'asse di rotazione, sicchè prendendo questo punto come origine ρ è una funzione di r; nell'altro caso la densità dipende solamente dalla distanza dall'asse di rotazione, sicchè ρ è una funzione di $r \operatorname{sen} \theta$.

Solido qualunque.

127. Per trovare il centro di gravità di un solido lo dividiamo

in elementi come segue: si tiri una serie di piani perpendicolari all'asse delle x, allora due piani consecutivi comprenderanno tra loro uno strato come $LplmqM$ nella figura; si tiri una seconda serie di piani perpendicolare all'asse delle y, allora ciascuno strato è diviso in strisce come $PpqQ$ nella figura; finalmente, si tirino dei piani perpendicolari all'asse delle z, allora ciascuna striscia è divisa in parallelepipedi come st nella figura. Siano

x,y,z le coordinate di s ed $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ quelle di t; allora $\Delta x\Delta y\Delta z$ è il volume di st, e siccome le coordinate del suo centro di gravità sono ultimamente x,y, e z, abbiamo

$$x' = \frac{\iiint x dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}, \quad y' = \frac{\iiint y dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}, \quad z' = \frac{\iiint z dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}.$$

128. Nell'applicare le formole precedenti ad esempii, è necessario porre gran cura nell'assegnare i limiti delle integrazioni; ciò sarà illustrato dall'Esempio.

Es. Trovare il centro di gravità dell'ottava parte di un ellissoide tagliata dai tre piani principali.

Sia l'equazione della superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Allora l'equazione della curva secondo la quale la superficie incontra il piano delle (x,y) è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

S'integri prima rispetto a z, e si prendano per limiti $z=0$ e $z=c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}$; includiamo così tutti gli elementi come st che formano la striscia $PpqQ$. In seguito s'integri rispetto ad y e si prendano per limite $y=0$ ed $y=b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$; includiamo così tutte le strisce come $PpqQ$ che formano lo strato $LplmqM$. Finalmente s'integri rispetto ad x, e si prendano per limiti $x=0$ ed $x=a$; includiamo così tutti gli strati $LplmqM$ che formano il solido che si considera. Quindi

$$x' = \frac{\int_0^a \int_0^{y_1} \int_0^{z_1} x dx\, dy\, dz}{\int_0^a \int_0^{y_1} \int_0^{z_1} dx\, dy\, dz},$$

in cui poniamo z_1 per $c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}$,

ed y_1 per $b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$.

Eseguendo le integrazioni si ottiene

$$x' = \frac{\int_0^a \int_0^{y_1} x \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dx\, dy}{\int_0^a \int_0^{y_1} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dx\, dy} = \frac{\int_0^a x y_1^2\, dx}{\int_0^a y_1^2\, dx}$$

$$= \frac{\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x dx}{\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx} = \frac{3a}{8}.$$

Similmente $y' = \frac{3b}{8}$, $z' = \frac{3c}{8}$.

In questo esempio possiamo eseguire le integrazioni con eguale semplicità in quell'ordine che ci piace; se integriamo prima rispetto ad x, poi rispetto ad y, e finalmente rispetto a z, avremo

$$x' = \frac{\int_0^c \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} x dz\, dy\, dx}{\int_0^c \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} dz\, dy\, dx};$$

in cui x_1 sta per $a \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$,

ed y_1 sta per $b \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)}$.

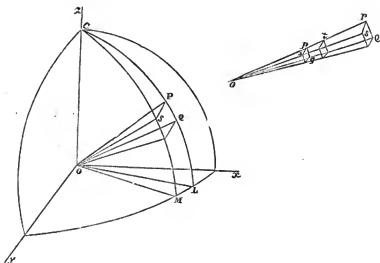
Questo si vedrà facilmente disegnando una figura in modo da fare i piani che terminano lo *strato* paralleli a quello delle (x,y), e gli spigoli della *striscia* paralleli all'asse delle x.

129. È spesso conveniente di dividere un solido in elementi polari.

Si tiri una serie di piani per l'asse delle z; il solido è così diviso in strati a forma di cunei come $COML$. Si descriva una serie di coni retti intorno all'asse delle z avendo i loro vertici in O; così ciascuno strato è diviso in solidi piramidali come $OPQS$. Finalmente, si descriva una serie di sfere concentriche intorno ad O come centro; così ciascuna piramide è divisa in elementi simili a $pqst$.

Sia $xOL = \varphi$, $COP = \theta$, $Op = r$,

$LOM = \Delta\varphi$, $POQ = \Delta\theta$, $pt = \Delta r$.

Allora pq è l'arco di un circolo di cui il raggio è r e l'angolo $\Delta\theta$; quindi $pq = r\Delta\theta$.

Inoltre ps è l'arco di un circolo di cui il raggio è $r \operatorname{sen}\theta$ e l'angolo $\Delta\varphi$; quindi $ps = r \operatorname{sen}\theta\Delta\varphi$.

Quindi, poichè l'elemento $pqst$ è ultimamente un parallelepipedo, il suo volume è $r^2 \operatorname{sen}\theta\,\Delta\theta\,\Delta\varphi\,\Delta r$.

Ancora le coordinate del suo centro di gravità sono ultimamente $r \cos\varphi \operatorname{sen}\theta$, $r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, ed $r\cos\theta$. Quindi supponendo che la sua densità sia ρ, abbiamo

$$x' = \frac{\iiint \rho r^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr}{\iiint \rho r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr},$$

$$y' = \frac{\iiint \rho r^3 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr}{\iiint \rho r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr},$$

$$z' = \frac{\iiint \rho r^3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr}{\iiint \rho r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr}.$$

130. Es. 1. Applicare le formole precedenti a trovare il centro di gravità di un emisfero di cui la densità varia come l'n^{ma} potenza della distanza dal centro.

Si prenda l'asse delle z perpendicolare al piano base dell'emisfero. Sia a il raggio dell'emisfero, e $\rho=\mu r^n$, in cui μ è una costante. S'integri prima rispetto ad r da 0 ad a; includiamo così tutti gli elementi come $pqst$ compresi nella piramide $OPQS$. In seguito s'integri rispetto a θ da 0 ad $\frac{1}{2}\pi$, includiamo così tutte le piramidi nello strato $COML$. Finalmente, s'integri da $\varphi=0$ a $\varphi=2\pi$; includiamo così tutti gli strati. Così

$$z'=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^a r^{n+3}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^a r^{n+2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr},$$

$$=\frac{n+3}{n+4}a\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\varphi\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{sen}\,\theta\,d\varphi\,d\theta}=\frac{n+3}{n+4}\cdot\frac{a}{2};$$

x' ed y' ciascuna $=0$.

Es. 2. Un cono retto ha il suo vertice sulla superficie di una sfera ed il suo asse coincidente con un diametro della sfera, trovare il centro di gravità del solido incluso tra il cono e la sfera.

Si prenda l'asse delle z coincidente con quello del cono; si supponga a il raggio della sfera, β il semi-angolo al vertice del cono. L'equazione polare della sfera è $r=2a\cos\theta$, e quella del cono $\theta=\beta$. Quindi abbiamo

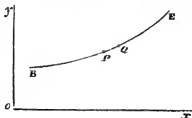
$$z'=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\beta}\int_0^{2a\cos\theta} r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\beta}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\,\mathrm{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr},$$

x' ed y' ciascuna $=0$.

Curva.

131. Supponiamo che un circolo di raggio variabile si muova in modo che il suo centro descriva una curva data ed il suo piano

sia sempre perpendicolare alla tangente della curva, possiamo domandare il centro di gravità del solido generato. Il caso più semplice è quello in cui il raggio è costante ed il solido di uniforme densità; il risultato dipende *unicamente* dalla natura della curva descritta dal centro del circolo, e per brevità il procedimento si chiama trovare *il centro di gravità di una curva*.

Sia $BPQE$ una curva *piana*; BP la lunghezza misurata da un punto fisso B, $BP=s$, $PQ=\Delta s$; x, y le coordinate di P. Dinoti k l'area di una sezione trasversale; allora il volume dell'elemento PQ è $k\Delta s$, e le coordinate del suo centro di gravità sono ultimamente x ed y. Quindi

$$x'=\frac{\int kxds}{\int kds}=\frac{\int xds}{\int ds}\ \ldots\ldots\ (1)\ \text{se } k \text{ è costante,}$$

$$y'=\frac{\int kyds}{\int kds}=\frac{\int yds}{\int ds}\ \ldots\ldots\ (2).$$

Poichè $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$, possiamo scrivere ancora

$$x'=\frac{\int x\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx}{\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx},\quad y'=\frac{\int y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx}{\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx}\ \ldots\ldots\ (3).$$

Dall'equazione della curva y e $\frac{dy}{dx}$ sono conosciuti in termini di x; i loro valori si debbono sostituire nelle espressioni precedenti e poi effettuare le integrazioni.

Se adoperiamo le coordinate polari abbiamo $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, e $\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}$.

Quindi

$$x' = \frac{\int r\cos\theta\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\,d\theta}{\int\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\,d\theta}\ ,\quad y' = \frac{\int r\,\mathrm{sen}\theta\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\,d\theta}{\int\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\,d\theta}$$

.... (4);

per r e $\frac{dr}{d\theta}$ dobbiamo sostituire i loro valori in termini di θ dati dall'equazione della curva.

132. Es. 1. Una verga rettilinea di uniforme spessezza e densità.

Prendendo l'origine sulla linea abbiamo $y=\beta x$, in cui β è costante; quindi, per le equazioni (3) dell' Art. 131, supponendo l'origine in un estremo della verga ed h l' ascissa dell' altro estremo,

$$x' = \frac{\int_0^h x\,dx}{\int_0^h dx} = \frac{h}{2},\quad y' = \frac{\beta\int_0^h x\,dx}{\int_0^h dx} = \frac{\beta h}{2}.$$

Cioè, il centro di gravità è il punto medio della verga.

Es. 2. Supponiamo che la sezione trasversale della verga varii come l'n^{ma} potenza della distanza da un estremo. Si prenda l'origine in questo estremo, e si faccia coincidere l'asse delle x con l' asse della verga; allora $y'=0$, e nell'equazione (1) dell'Art.131 poniamo μx^n per k, in cui μ è costante. Quindi, se h è la lunghezza della verga,

$$x' = \frac{\int_0^h x^{n+1}ds}{\int_0^h x^n\,ds} = \frac{\int_0^h x^{n+1}dx}{\int_0^h x^n\,dx} = \frac{n+1}{n+2}h.$$

Es. 3. Un arco di circolo.

Si prenda l'origine nel centro del circolo, e l' asse delle x che divida per metà l'arco. Allora $y'=0$; e supponendo che sia 2α l'angolo sotteso al centro dal dato arco, ed a il raggio del circolo, abbiamo, per l' Art. 131, equazione (4),

$$x' = \frac{a^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta}{a\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta} = \frac{a\,\mathrm{sen}\alpha}{\alpha}.$$

Es. 4. L'arco di una semicicloide.

Si prenda l'origine al vertice, e per asse delle y la tangente; allora $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a-x}{x}$: quindi

$$x' = \frac{\int_0^{2a} x\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}\,dx}{\int_0^{2a}\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}\,dx} = \frac{\int_0^{2a} x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\int_0^{2a} x^{-\frac{1}{2}}\,dx} = \frac{\frac{2}{3}(2a)^{\frac{3}{2}}}{2\,(2a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2a}{3},$$

$$y' = \frac{\int_0^{2a} y\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}\,dx}{\int_0^{2a}\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}\,dx} = \frac{\int_0^{2a}\frac{y}{\sqrt{x}}\,dx}{\int_0^{2a}\frac{dx}{\sqrt{x}}} = \frac{2\pi a\,(2a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(2a)^{\frac{3}{2}}}{2\,(2a)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\pi - \frac{4}{3}\right)a.$$

Es. 5. La curva $y = \frac{1}{2}c\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$.

Se s_1 dinota la lunghezza di un arco della curva misurato dal punto di cui le coordinate sono 0, c, al punto (x_1, y_1) abbiamo per le coordinate del suo centro di gravità

$$x' = \frac{\int_0^{x_1} x\frac{ds}{dx}\,dx}{s_1}, \quad y' = \frac{\int_0^{x_1} y\frac{ds}{dx}\,dx}{s_1}.$$

Ora
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

quindi
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right);$$

così
$$s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right), \quad \text{ed} \quad s_1 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_1}{c}} - e^{-\frac{x_1}{c}}\right),$$

Con ciò si troverà

$$x' = x_1 - \frac{c\,(y_1 - c)}{s_1}, \quad \text{ed} \quad y' = \frac{y_1}{2} + \frac{cx_1}{2s_1}.$$

133. Se la curva è a doppia curvatura, le formole (1) e (2) dell' Art. 131 valgono ancora; per effettuare le integrazioni dobbiamo usare la formola

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right\}};$$

e dalle due equazioni della curva dobbiamo trovare $\frac{dx}{dz}$ e $\frac{dy}{dz}$ in termini di z. Per esempio, nell' elica

$$x = a \cos nz, \quad y = a \operatorname{sen} nz;$$

quindi

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{(1 + n^2a^2)},$$

$$x' = \frac{\int \sqrt{(1+n^2a^2)}\, x\, dz}{\int \sqrt{(1+n^2a^2)}\, dz} = \frac{\int a \cos nz\, dz}{\int dz}.$$

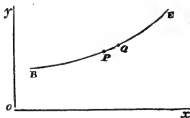
Se prendiamo per limiti $z=0$ e $z=h$, abbiamo

$$x' = \frac{a \operatorname{sen} nh}{nh}.$$

Similmente

$$y' = \frac{a(1 - \cos nh)}{nh}, \quad z' = \frac{1}{2}h.$$

Superficie di rotazione.

134. Sia $BPQE$ una curva che girando intorno all' asse delle x genera una superficie. Supponiamo un guscio di cui questa superficie è il limite esterno e di cui il limite interno è un' altra superficie di rotazione intorno all' asse delle x infinitamente vicina alla prima. Si cerca il centro di gravità di una porzione di questo guscio tagliata da piani perpendicolari all' asse delle x.

Siano P, Q, punti adiacenti nella curva generatrice esterna; si supponga B un punto fisso nella curva, sia $BP=s$, e $PQ=\Delta s$; siano x, y le coordinate di P; k la spessezza del guscio in P. Il volume dell' elemento contenuto tra due piani perpendicolari

all'asse delle x per P e Q rispettivamente è ultimamente $2\pi yk\Delta s$, e l'ascissa del centro di gravità di questo elemento è ultimamente x; quindi

$$x' = \frac{\int 2\pi ykx\,ds}{\int 2\pi yk\,ds} = \frac{\int yx\,ds}{\int y\,ds},$$

se k è costante.

Poichè $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$, abbiamo

$$x' = \frac{\int_c^h yx\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx}{\int_c^h y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx},$$

in cui c ed h sono le distanze dall'origine dei piani estremi.

Poichè il centro di gravità richiesto è sull'asse delle x, è necessario solamente il valore di x' per determinarne la posizione.

Similmente, se la curva $PBQE$ genera una superficie girando intorno all'asse delle y, abbiamo

$$y' = \frac{\int_c^h xy\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx}{\int_c^h x\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx},$$

in cui c ed h dinotano come sopra le ascisse delle estremità della curva.

Se usiamo le coordinate polari, abbiamo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, e

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}};$$

così se la curva gira intorno l'asse delle x, abbiamo

$$x' = \frac{\int r^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\,d\theta}{\int r\,\text{sen}\,\theta\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\,d\theta},$$

e se la curva gira intorno l'asse delle y, abbiamo

$$y' = \frac{\int r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\, d\theta}{\int r \cos\theta \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\, d\theta} .$$

I limiti delle integrazioni sono i valori di θ che corrispondono alle estremità della curva.

Es. 1. Una superficie cilindrica.

Si prenda l'asse del cilindro per asse delle x; allora y è eguale al raggio del cilindro, ed è costante; quindi

$$x' = \frac{\int_c^h x dx}{\int_c^h dx} = \frac{\frac{1}{2}(h^2 - c^2)}{h - c} = \frac{h + c}{2} .$$

Es. 2. Una superficie sferica.

Qui
$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)} ,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} ,$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{a}{y} ;$$

quindi
$$x' = \frac{\int_c^h ax\, dx}{\int_c^h a\, dx} = \frac{c + h}{2} .$$

Quindi in tutti e due questi esempii il centro di gravità è ad eguale distanza dai due piani estremi.

Es. 3. La superficie di un cono.

Qui $y = x \tan\alpha$, in cui α è il semi-angolo al vertice,

$$\frac{ds}{dx} = \sec\alpha,$$

$$x' = \frac{\int_c^h x \tan\alpha\, x \sec\alpha\, dx}{\int_c^h x \tan\alpha \sec\alpha\, dx} = \frac{2(h^3 - c^3)}{3(h^2 - c^2)} = \frac{2(h^2 + hc + c^2)}{3(h + c)} .$$

Es. 4. Supponiamo che la cicloide

$$y = \sqrt{(2ax - x^2)} + a \operatorname{vers}^{-1} \frac{x}{a}$$

giri intorno l'asse delle x.

Qui $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2a-x}{x}\right)}, \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)};$$

così $$x' = \frac{\int_0^{2a} yx\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}\,dx}{\int_0^{2a} y\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}\,dx} = \frac{\int_0^{2a} yx^{\frac{1}{2}}\,dx}{\int_0^{2a} yx^{-\frac{1}{2}}\,dx}.$$

$$= \frac{\frac{2\pi a\,(2a)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{8}{45}(2a)^{\frac{5}{2}}}{2\pi a\,(2a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(2a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2a}{3}\left(\pi - \frac{8}{15}\right)}{\pi - \frac{4}{3}}$$

Es. 5. Supponiamo che la cicloide

$$y = \sqrt{(2ax - x^2)} + a \operatorname{vers}^{-1} \frac{x}{a}$$

giri intorno l'asse delle y, e si voglia il centro di gravità della superficie generata da quella metà della curva per la quale la y è positiva.

Qui $$y' = \frac{\int_0^{2a} yx\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}\,dx}{\int_0^{2a} x\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}\,dx} = \frac{\int_0^{2a} yx^{\frac{1}{2}}\,dx}{\int_0^{2a} x^{\frac{1}{2}}\,dx}$$

$$= \frac{\frac{2\pi a\,(2a)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{8}{45}(2a)^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}(2a)^{\frac{3}{2}}} = a\left(\pi - \frac{8}{15}\right).$$

Superficie qualunque.

135. Siavi un guscio che abbia una data superficie per uno dei suoi limiti, e supponiamo la sua spessezza infinitamente piccola. Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque della data su-

perficie, k la spessezza in quel punto, ΔS l'area di un elemento della superficie ivi, allora $k\Delta S$ è ultimamente il volume di questo elemento; ed x, y, z sono le coordinate del suo centro di gravità; quindi

$$x' = \frac{\int kx\, dS}{\int k\, dS},$$

e simili espressioni si hanno per y' e z'.

È dimostrato nel Calcolo integrale che se prendiamo ΔS tale che la sua proiezione sul piano delle (x, y) sia il rettangolo $\Delta x\, \Delta y$,

$$\frac{\Delta S}{\Delta x\, \Delta y} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}} \text{ ultimamente.}$$

Quindi $$x' = \frac{\iint kx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\, dx\, dy}{\iint k \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\, dx\, dy}.$$

Es. La superficie dell'ottava parte di una sfera.

Qui $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}.$$

Quindi $$x' = \frac{\iint \frac{x\, dx\, dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}}{\iint \frac{dx\, dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}}.$$

S'integri prima rispetto ad y da $y = 0$ ad $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; includiamo così tutti gli elementi che formano la striscia della superficie di cui $LlmM$ è la proiezione sul piano delle (x, y); si vegga la fig. dell'Art. 127.

Ora $$\int_0^{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}} = \frac{1}{2}\pi;$$

quindi $$x' = \frac{\int \frac{1}{2}\pi x\, dx}{\int \frac{1}{2}\pi\, dx} = \frac{\int x\, dx}{\int dx}.$$

I limiti dell'integrazione rispetto ad x sono 0 ed a;

quindi $$x' = \frac{1}{2} a.$$

Similmente $$y' = \frac{1}{2} a, \quad z' = \frac{1}{2} a.$$

136. Negli Articoli precedenti abbiamo dato le formole usuali per trovare i centri di gravità dei corpi, ma si possono incontrare dei casi particolari che vanno più convenientemente trattati con metodi speciali. Aggiungiamo alcuni esempii.

(1) Un circolo gira intorno ad una sua tangente per un angolo di 180°; trovare il centro di gravità del solido generato. Si prenda per asse delle y la tangente intorno a cui il circolo gira, e per asse delle x il raggio condotto al punto di contatto nel piano che divide per metà il solido; il centro di gravità cadrà perciò sull'asse delle x. Essendo x e y le coordinate di un punto del circolo, sarà $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$.

L'elemento $y\Delta x$ del circolo con la sua rotazione genererà un guscio semi-cilindrico, di cui il volume è ultimamente $2y\pi x\Delta x$; il centro di gravità di questo guscio sarà sull'asse delle x ad una distanza $\frac{2x}{\pi}$ dall'origine (si vegga l'Art. 132, Es. 3);

quindi $$x' = \frac{\int_0^{2a} \frac{2x}{\pi}\, 2y\pi x\, dx}{\int_0^{2a} 2y\pi x\, dx} = \frac{\frac{2}{\pi}\int_0^{2a} yx^2 dx}{\int_0^{2a} yx\, dx} = \frac{5a}{2\pi}.$$

(2) Un guscio ha per suoi limiti interno ed esterno due ellissoidi simili e similmente situati; si cerca il centro di gravità della sua ottava parte inclusa fra i tre piani principali. Siano a, b, c i semi-assi dell'ellissoide esterno, ra, rb, rc quelli dell'ellissoide interno, r essendo una quantità minore dell'unità.

Se a, b, c sono i semi-assi di un ellissoide; il volume della sua ottava parte è $\frac{1}{6}\pi abc$, e le coordinate del suo centro di gravità sono $\frac{3}{8}a$, $\frac{3}{8}b$, e $\frac{3}{8}c$ (si vegga l'Art. 128). Quindi

$$\frac{3}{8} a \cdot \frac{1}{6}\pi abc = \frac{3}{8} ra \cdot \frac{1}{6}\pi r^3 abc + x'\left(\frac{1}{6}\pi abc - \frac{1}{6}\pi r^3 abc\right);$$

quindi $$x' = \frac{\frac{3}{8}a(1-r^4)}{1-r^3} = \frac{3}{8}a \cdot \frac{1+r+r^2+r^3}{1+r+r^2}.$$

Se supponiamo il guscio infinitamente sottile, dobbiamo porre $r=1$, ed allora $x' = \frac{1}{2}a$. Simili risultati si possono trovare per y' e z'.

(3) Un ellissoide è composto di un numero infinito di gusci infinitamente sottili; ciascun guscio ha per suoi limiti interno ed esterno due ellissoidi simili e similmente posti; la densità di ciascun guscio è costante, ma la densità varia da guscio a guscio secondo una data legge; determinare il centro di gravità dell'ottava parte dell'ellissoide inclusa fra i tre piani principali.

Rappresentino x, y, z i tre semi-assi di un ellissoide; allora il volume dell'ellissoide è $\frac{4\pi}{3}xyz$. Supponiamo che $y=mx$ e $z=nx$, in cui m ed n sono costanti, allora il volume diviene $\frac{4\pi mn}{3}x^3$, e se vi è un ellissoide *simile* che ha $x+\Delta x$ pel semiasse corrispondente al semiasse x del primo ellissoide, il volume del secondo ellissoide sarà $\frac{4\pi mn}{3}(x+\Delta x)^3$. Quindi il volume del guscio limitato da due ellissoidi simili e similmente posti si può dinotare con $\frac{4\pi mn}{3}\{(x+\Delta x)^3-x^3\}$, e quindi con $4\pi mnx^2\Delta x$ quando la spessezza è diminuita indefinitamente. Dinoti $\varphi(x)$ la densità del guscio, allora la sua massa è $4\pi mn\varphi(x)x^2\Delta x$. Così la massa dell'ottava parte del guscio è $\frac{\pi mn}{2}\varphi(x)x^2\Delta x$. E l'ascissa del centro di gravità del guscio misurata secondo il semiasse x è $\frac{x}{2}$, per l'esempio precedente. Così per l'ascissa x' del centro di gravità abbiamo

$$x' = \frac{\int_0^a \frac{\pi mn}{2}\varphi(x)\frac{x}{2}x^2dx}{\int_0^a \frac{\pi mn}{2}\varphi(x)\,x^2\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_0^a x^3\varphi(x)\,dx}{\int_0^a x^2\varphi(x)dx},$$

in cui a è il semiasse della superficie esterna corrispondente al semiasse x. Quando $\varphi(x)$ è data le integrazioni si possono completare; e quando si conosce x', le altre coordinate del centro di gravità si possono dedurre per simmetria.

(4) Una corda di un'ellisse stacca un segmento di area costante, determinare il luogo del centro di gravità del segmento.

Se una corda stacca un segmento di area costante da un *circolo*, è evidente per la simmetria della figura che il luogo del centro di gravità del segmento è un *circolo concentrico*. Ora se il circolo si proietta ortogonalmente sopra un piano inclinato al piano del circolo, il circolo si proietta in un'ellisse; ed i segmenti del circolo di area costante si proiettano in segmenti dell'ellisse di area costante; ancora il *circolo concentrico* si proietta in una seconda ellisse simile alla prima ellisse e similmente situata.

Così il luogo richiesto è un'ellisse simile alla data ellisse e similmente situata.

Questo problema si potrebbe risolvere senza far uso delle proiezioni, nel modo indicato nell'esempio seguente.

(5) Un piano stacca da un ellissoide un segmento di volume costante; determinare il luogo del centro di gravità del segmento.

Il piano segante abbia una posizione qualunque; e si riferisca l'ellissoide a semi-diametri coniugati come assi delle coordinate; sia il piano delle (y, z) parallelo alla posizione del piano segante, e supponiamo che l'equazione dell'ellissoide sia

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Supponiamo ora che il segmento staccato dal piano sia diviso in un numero infinitamente grande di strati infinitamente sottili per mezzo di piani paralleli al piano delle (y, z). Per le proprietà dell'ellissoide questi strati saranno terminati da ellissi che hanno i loro centri sull'asse delle x; e così vediamo che il centro di gravità del segmento staccato sarà sull'asse delle x. Si consideri uno degli strati limitato dai piani che hanno per loro ascisse x ed $x+\Delta x$ rispettivamente; allora si troverà che il volume dello strato è ultimamente

$$\pi b'c'\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\,\Delta x,$$

in cui ω è l'angolo tra gli assi delle y e z, ed α è l'angolo che l'asse delle x fa col piano delle (y, z). Supponiamo che V dinoti

il volume costante e $\lambda a'$ l'ascissa del piano che stacca il segmento; allora

$$V = \pi b'c' \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \alpha \int_{\lambda a'}^{a'} \left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right) dx$$

$$= \pi a'b'c' \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \alpha \left\{ 1 - \lambda - \frac{1}{3}(1 - \lambda^3) \right\}.$$

Ora per le proprietà dell'ellissoide

$$\pi a'b'c' \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \alpha = \pi abc,$$

in cui a, b, c sono i semiassi dell'ellissoide; così

$$V = \pi abc \left\{ 1 - \lambda - \frac{1}{3}(1 - \lambda^3) \right\} \dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

E, se x' è l'ascissa del centro di gravità del segmento staccato,

$$x' = \frac{\pi b'c' \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \alpha \int_{\lambda a'}^{a'} x \left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right) dx}{V}$$

$$= \frac{\pi a'^2 b'c' \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \alpha}{V} \left\{ \frac{1}{2}(1 - \lambda^2) - \frac{1}{4}(1 - \lambda^4) \right\}$$

$$= \frac{\pi abc}{V} \left\{ \frac{1}{2}(1 - \lambda^2) - \frac{1}{4}(1 - \lambda^4) \right\} a' \dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Ora (1) dà un valore costante per λ, e quindi (2) mostra che x' *serba un rapporto costante ad* a'.

Così il luogo del centro di gravità de' segmenti di un ellissoide di volume costante è un ellissoide simile all'ellissoide primitivo e similmente situato.

(6) Trovare il centro di gravità di una porzione di un ellissoide compresa fra due coni il di cui vertice comune è al centro dell'ellissoide e le basi sono parallele.

Il volume tra i due coni si può dividere in un numero infinitamente grande di gusci che hanno il centro dell'ellissoide come loro vertice comune, e le loro basi in piani paralleli alle basi dei due coni. Mostreremo prima che se i piani che contengono le basi dei gusci sono equidistanti *i gusci sono tutti eguali*. Si prendano dei semidiametri coniugati per assi, e sia il piano delle

(y, z) parallelo alle basi dei due coni. Il volume del cono che ha il centro dell'ellissoide per vertice, e per base la curva piana formata dall'intersezione dell'ellissoide col piano che ha per ascissa x, è

$$\frac{1}{3}\pi b'c' \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\alpha\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)x,$$

in cui la notazione è la stessa che nell'esempio precedente. Il volume del cono che ha il centro dell'ellissoide per vertice, e per base la curva piana formata dall'intersezione dell'ellissoide col piano che ha per ascissa $x+\Delta x$, è

$$\frac{1}{3}\pi b'c' \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\alpha\left\{1-\frac{(x+\Delta x)^2}{a'^2}\right\}(x+\Delta x).$$

Il volume dello strato tra i piani di cui le ascisse sono rispettivamente x ed $x+\Delta x$ è ultimamente

$$\pi b'c' \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\alpha\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)\Delta x.$$

Quindi otteniamo per il volume di uno dei gusci ultimamente il prodotto di $\pi' bc' \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\omega$ per

$$\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)x+\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)\Delta x-\frac{1}{3}\left\{1-\frac{(x+\Delta x)^2}{a'^2}\right\}(x+\Delta x)\right];$$

questo prodotto è ultimamente

$$\frac{2\pi b'c' \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\alpha\,\Delta x}{3}.$$

Il centro di gravità di ciascun guscio è sull'asse delle x ad una distanza dal vertice del cono, che è eguale ai tre quarti dell'ascissa del piano in cui è situata la base del cono (si vegga l'Es. (5) dell'Art. 109). Dinoti x' l'ascissa del centro di gravità del solido proposto; allora se h e k sono le ascisse delle basi piane dei due coni,

$$x'=\frac{\frac{3}{4}\int_h^k \frac{2\pi b'c' \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\alpha}{3}x\,dx}{\int_h^k \frac{2\pi b'c' \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\alpha}{3}dx}=\frac{3\,(k^3-h^3)}{8\,(k-h)}=\frac{3}{8}(k+h).$$

Conchiuderemo questo Capitolo con alcune poche proposizioni generali intorno a proprietà del centro di gravità.

137. *Se la massa di ciascun elemento di un sistema si moltiplica pel quadrato della sua distanza da un punto dato, la somma dei prodotti è minima quando il punto dato è il centro di gravità del sistema.*

Si prenda per origine il centro di gravità del sistema; siano α, β, γ, le coordinate del punto dato; x_1, y_1, z_1, le coordinate del primo elemento; x_2, y_2, z_2, quelle del secondo; e così di seguito; $m_1, m_2, \ldots$ le masse degli elementi; $\rho_1, \rho_2, \ldots$ le distanze degli elementi dal loro centro di gravità; $r_1, r_2, \ldots$ le distanze degli elementi dal punto fisso; allora

$$r_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) + \rho_1^2,$$
$$r_2^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2) + \rho_2^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si moltiplichino queste equazioni per $m_1, m_2, m_3, \ldots$ rispettivamente, e si addizionino; allora

$$\Sigma m r^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,\Sigma m - 2(\alpha \Sigma m x + \beta \Sigma m y + \gamma \Sigma m z) + \Sigma m \rho^2.$$

Ma, poichè l'origine è il centro di gravità del sistema,

$$\Sigma m x = 0, \quad \Sigma m y = 0, \quad \Sigma m z = 0,$$

quindi $$\Sigma m r^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,\Sigma m + \Sigma m \rho^2.$$

Ora $\Sigma m \rho^2$ è indipendente dalla posizione del punto dato; quindi il minimo valore di $\Sigma m r^2$ è quello che si ha quando $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ svanisce, cioè, quando il punto dato è al centro di gravità del sistema.

138. Siano $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, gli angoli che ρ_1 fa con gli assi; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gli angoli che ρ_2 fa con gli assi; e così di seguito; allora abbiamo, supponendo che l'origine sia il centro di gravità del sistema,

$$\Sigma m \rho \cos\alpha = 0, \quad \Sigma m \rho \cos\beta = 0, \quad \Sigma m \rho \cos\gamma = 0.$$

Si elevi a quadrato ciascuna di queste equazioni e si addizionino i risultati; allora se m, m' rappresentano due qualunque delle masse, e (ρ, ρ') è l'angolo tra le linee rette che le congiungono col centro di gravità,

$$\Sigma m^2 \rho^2 + 2\Sigma m m' \rho \rho' \cos(\rho, \rho') = 0.$$

Ma $$2\rho\rho' \cos(\rho, \rho') = \rho^2 + \rho'^2 - u^2,$$

in cui u dinota la distanza tra m ed m'. Quindi

$$\Sigma m^2\rho^2 + \Sigma mm' (\rho^2 + \rho'^2 - u^2) = 0.$$

Se scegliamo il coefficiente di ρ_1^2, troviamo che è

$$m_1^2 + m_1 (m_2 + m_3 + \ldots), \quad \text{o} \quad m_1 \Sigma m,$$

e gli altri coefficienti sono simili. Quindi l'equazione precedente si può scrivere

$$\Sigma m \, \Sigma m\rho^2 = \Sigma mm'u^2.$$

139. *Se un elemento è sollecitato da più forze ciascuna delle quali passa per un punto fisso ed è proporzionale alla distanza da quel punto, la forza risultante passerà per un punto fisso e sarà proporzionale alla distanza da quel punto.*

Si prenda per origine una posizione qualunque dell'elemento; siano x_1, y_1, z_1, le coordinate di un punto fisso; r_1 la distanza di questo punto dall'origine; $\mu_1 r_1$ la forza che agisce sull'elemento da questo punto fisso. Similmente siano x_2, y_2, z_2, le coordinate di un secondo punto fisso; r_2 la sua distanza dall'origine, e $\mu_2 r_2$ la forza corrispondente sull'elemento, e così di seguito. Dinotino X, Y, Z le forze totali che agiscono sull'elemento secondo gli assi delle x, y, z; allora, per l'Art. 26,

$$X = \mu_1 r_1 \times \frac{x_1}{r_1} + \mu_2 r_2 \times \frac{x_2}{r_2} + \mu_3 r_3 \times \frac{x_3}{r_3} + \ldots\ldots$$
$$= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \ldots\ldots$$

Similmente $\quad Y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 + \ldots\ldots$

e $\quad Z = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 + \ldots\ldots$

Siano x', y', z' le coordinate del centro di gravità di un sistema di elementi, di cui le masse sono proporzionali a $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ situati ai rispettivi punti fissi; allora

$$x' = \frac{\Sigma \mu x}{\Sigma \mu}, \quad y' = \frac{\Sigma \mu y}{\Sigma \mu}, \quad z' = \frac{\Sigma \mu z}{\Sigma \mu};$$

quindi $\quad X = x'\Sigma\mu, \quad Y = y'\Sigma\mu, \quad Z = z'\Sigma\mu.$

Queste equazioni mostrano che la forza risultante è eguale ad $r'\Sigma\mu$, in cui r' è la distanza del centro di gravità dall'origine, e che la sua direzione passa pel centro di gravità. Quindi quando l'elemento è situato nel centro di gravità la forza risultante svanisce e l'elemento è in equilibrio.

140. *Un corpo è situato su di un piano orizzontale, trovare quando sarà sostenuto.*

La sola forza che agisce su di esso oltre la resistenza del piano è il suo proprio peso, e questo agisce in una direzione verticale pel centro di gravità del corpo. Quindi per l'Art. 91, il corpo non sarà in equilibrio a meno che la verticale pel centro di gravità del corpo non cada dentro del poligono formato dal congiungere i punti di contatto del corpo e del piano in modo da includerli tutti e da non avere alcun angolo rientrante.

Quando un corpo è sospeso da un punto intorno al quale esso può muoversi liberamente, non sarà in equilibrio a meno che il suo centro di gravità non cada nella linea verticale che passa pel punto di sospensione.

Infatti il corpo è sollecitato da due forze, il suo proprio peso che agisce verticalmente pel suo centro di gravità e la forza proveniente dal punto fisso; per l'equilibrio queste forze debbono agire nella stessa linea retta ed in direzioni opposte; così il centro di gravità deve essere nella linea verticale che passa pel punto di sospensione.

Quindi se un corpo è sospeso successivamente da due punti le linee verticali condotte per i punti di sospensione passeranno entrambe pel centro di gravità; quindi il punto nel quale esse s'intersegano è il centro di gravità.

Se un corpo è capace di girare intorno ad un asse che non è verticale esso non sarà in equilibrio a meno che il centro di gravità non cada nel piano verticale che passa per l'asse. Infatti il corpo è sollecitato dal suo proprio peso e dalle forze provenienti dai punti fissi; per l'Art. 87, il momento del peso rispetto all'asse fisso deve svanire, ciò richiede che il centro di gravità sia nel piano verticale che passa per l'asse fisso.

Lo studente scoprirà subito come un fatto sperimentale che vi è una differenza importante tra la posizione di equilibrio nella quale il centro di gravità è verticalmente *al di sopra* del punto fisso o dell'asse fisso, e quella nella quale esso ne è verticalmente *al di sotto*. Nel primo caso, se il corpo è di poco disturbato dalla sua posizione di equilibrio ed indi lasciato a sè stesso, esso incomincerà a recedere dalla sua posizione primitiva. Nel secondo caso, se il corpo è di poco disturbato dalla sua posizione di equilibrio ed indi lasciato a sè stesso, esso incomincerà a ritornare alla sua posizione primitiva. La prima posizione di equilibrio si chiama *instabile*, e la seconda *stabile*. Ritorneremo su questo punto nel Cap. XI.

141. Il volume (V) di una porzione di cilindro intercetta fra

due piani, uno dei quali è perpendicolare all'asse del cilindro, è dato dall'equazione

$$V=\iint z dx\, dy,$$

in cui il piano delle (x, y) si suppone perpendicolare all'asse, e z è l'ordinata di un punto nell'altro piano. I limiti dell'integrazione dipendono dalla curva secondo la quale il piano delle (x, y) sega la superficie. Questo segue dal Calcolo integrale.

Dinoti φ l'angolo tra i due piani; l'area di un elemento dell'altra sezione di cui $\Delta x \Delta y$ è la proiezione sul piano delle (x, y) è $\Delta x \Delta y \sec\varphi$. Dinoti A l'area della sezione del cilindro col piano delle (x, y), e per conseguenza $A \sec\varphi$ l'area dell'altra sezione; sia z' l'ordinata del centro di gravità dell'area piana formata dall'intersezione del cilindro col secondo piano; allora

$$A \sec\varphi \cdot z' = \iint z \sec\varphi\, dx\, dy,$$

o sia $$Az' = \iint z\, dx\, dy,$$

quindi $$V = Az'.$$

Il volume è quindi eguale all'area della base moltiplicata per la perpendicolare su di essa dal centro di gravità dell'altra sezione.

I centri di gravità delle due sezioni piane sono nella stessa linea retta parallela alle linee generatrici. Infatti le coordinate del centro di gravità della sezione col piano delle (x, y) sono

$$\frac{\iint x\, dx\, dy}{A} \quad \text{ed} \quad \frac{\iint y\, dx\, dy}{A},$$

e quelle della sezione superiore sono

$$\frac{\iint x \sec\varphi\, dx\, dy}{A \sec\varphi} \quad \text{ed} \quad \frac{\iint y \sec\varphi\, dx\, dy}{A \sec\varphi},$$

che coincidono con i primi valori.

Così i centri di gravità di tutte le sezioni piane di un cilindro sono situati sopra una linea retta parallela alle linee generatrici del cilindro.

Se una porzione di cilindro è tagliata da due piani, nessuno dei quali è perpendicolare all'asse, possiamo supporla essere la

differenza di due porzioni che hanno per loro base comune una sezione perpendicolare all'asse. La differenza delle linee rette condotte dai centri di gravità delle sezioni oblique perpendicolarmente alla sezione ortogonale sarà la linea retta che congiunge quei centri di gravità. Quindi il volume di una porzione di cilindro compresa fra due piani qualunque è eguale al prodotto dell'area di una sezione ortogonale per la linea retta che unisce i centri di gravità delle sezioni oblique.

142. *Pel centro di gravità di ciascuna faccia di un tetraedro agisce una forza ad angoli retti sulla faccia, e proporzionale all'area della faccia: se le forze agiscono tutte all'indentro o all'infuori esse saranno in equilibrio.*

Ciò si deduce facilmente dalle Proposizioni in fine del Cap. V. Il risultato si può estendere alla proposizione seguente: *Pel centro di gravità di ciascuna faccia di un poliedro agisce una forza ad angoli retti sulla faccia, e proporzionale all'area della faccia: se tutte le forze agiscano all'indentro o all'infuori esse saranno in equilibrio.*

Per mezzo dell'Art. 51 possiamo dedurre la proposizione seguente relativa alle coppie: *Un sistema di coppie rappresentate in posizione e grandezza dalle facce di un poliedro sarà in equilibrio, supponendo gli assi delle coppie diretti tutti all'indentro o all'infuori.* Questo è dato da Möbius; *Lehrbuch der Statik*, Vol. I. pag. 87.

Teoremi di Guldino.

143. *Se una figura piana gira intorno ad un asse posto nel suo piano, il volume del solido generato da questa figura nel girare per un angolo qualunque è eguale ad un prisma, di cui la base è la figura girante e l'altezza è la lunghezza del cammino percorso dal centro di gravità dell'area della figura piana.*

L'asse di rotazione in questa e nella proposizione seguente si suppone che non tagli la curva generatrice.

Si prenda l'asse di rotazione per asse delle x, ed il piano della figura rotante nella sua posizione iniziale per piano delle (x, y); sia β l'angolo pel quale gira la figura.

L'area elementare $\Delta x \Delta y$ della figura piana nel girare per un angolo $\Delta\theta$ genera il solido elementare di cui il volume è $y\Delta\theta\Delta x\Delta y$; quindi l'intero solido

$$=\iiint_0^\beta y\,dx\,dy\,d\theta = \beta\iint y\,dx\,dy.$$

I limiti di x ed y dipendono dalla natura della curva. Ma se y' è l'ordinata del centro di gravità della figura piana, allora, per l'Art. 118,

$$y' = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy},$$

i limiti essendo gli stessi di prima.

Quindi l'intero solido $= \beta\iint y\,dx\,dy = y'\beta\iint dx\,dy =$ all'arco descritto dal centro di gravità moltiplicato per l'area della figura.

Se una figura gira intorno ad un asse posto nel suo proprio piano, la superficie del solido generato è eguale in area al rettangolo, di cui i lati sono la lunghezza del perimetro della figura generatrice e la lunghezza del cammino del centro di gravità del perimetro.

La superficie generata dall'arco Δs della figura rotante per un angolo $\Delta\theta$ è $y\Delta\theta\Delta s$; quindi l'intera superficie

$$= \iint_0^\beta y\,ds\,d\theta = \beta\int y\,ds.$$

I limiti dipendono dalla natura della curva. Ma se y' è l'ordinata del centro di gravità del perimetro,

$$y' = \frac{\int y\,ds}{\int ds},$$

i limiti essendo gli stessi di prima.

Quindi l'intera superficie $= y'\beta\int ds =$ all'arco descritto dal centro di gravità, moltiplicato per la lunghezza del perimetro.

Es. 1. *Trovare il volume e la superficie dell'anello generato dalla rotazione di un circolo intorno ad una linea retta nel suo proprio piano che non l'incontra.*

Sia a la distanza del centro del circolo dall'asse di rotazione; b il raggio del circolo; allora la lunghezza del cammino del centro di gravità dell'area della figura è $2\pi a$, e l'area della figura è πb^2;

quindi il volume del solido $= 2\pi^2 ab^2$.

Ancora la lunghezza del cammino del centro di gravità del perimetro è $2\pi a$, e la lunghezza del perimetro è $2\pi b$;

quindi la superficie del solido $= 4\pi^2 ab$.

Es. 2. *Trovare il centro di gravità dell'area e dell'arco di un semicerchio.*

Un semicerchio girando intorno al suo diametro genera una sfera; il volume della sfera è $\frac{4}{3}\pi a^3$, e la superficie $4\pi a^2$; il raggio essendo a; l'area del semicerchio è $\frac{1}{2}\pi a^2$, ed il perimetro πa; quindi, la distanza del centro di gravità dell' *area* dal diametro

$$= \frac{\text{volume della sfera}}{2\pi \cdot \text{area del semicerchio}} = \frac{4a}{3\pi};$$

la distanza del centro di gravità dell' arco dal diametro

$$= \frac{\text{superficie della sfera}}{2\pi \cdot \text{arco del semicerchio}} = \frac{2a}{\pi}.$$

Es. 3. *Trovare la superficie ed il volume del solido generato dalla rotazione di una cicloide intorno alla tangente nel suo vertice.*

Nell' Art. 132 abbiamo trovato $\frac{2a}{3}$ per la distanza del centro di gravità dell'arco di una cicloide dal suo vertice; e l'intera lunghezza dell' arco è $8a$. Quindi la superficie del solido generato è

$$2\pi \times \frac{2a}{3} \times 8a; \quad \text{cioè} \quad \frac{32}{3}\pi a^2.$$

E nell' Art. 113 abbiamo trovato che la distanza del centro di gravità dell' area inclusa tra la cicloide e la sua base dal vertice è $\frac{7}{6}a$; e l' area così inclusa è $3\pi a^2$. Quindi l' area della porzione che nel presente caso gira intorno alla tangente è $4\pi a^2 - 3\pi a^2$, cioè πa^2. Ed il centro di gravità di quest' area si può mostrare essere alla distanza $\frac{a}{2}$ dal vertice. (Si vegga Es. (2) dell'Art. 109). Quindi il volume della figura generata è $2\pi\frac{a}{2}\pi a^2$, cioè $\pi^2 a^3$.

ESEMPII.

1. Trovare il centro di gravità di cinque elementi eguali pesanti situati in cinque dei vertici di un esagono regolare.

2. Cinque pezzi di una catena uniforme sono sospesi a punti equidistanti lungo una verga rigida senza peso, e le loro estremità inferiori sono in una linea retta che passa per un estremo della verga; trovare il centro di gravità del sistema.

3. Un quadrilatero piano $ABCD$ è bisegato dalla diagonale AC, e l'altra diagonale divide AC in due parti nel rapporto di p a q; mostrare che il centro di gravità del quadrilatero giace in AE e la divide in due parti nel rapporto di $2p+q$ a $p+2q$.

4. Dal fatto che ogni sistema di elementi pesanti ha un centro di gravità e solamente uno, dedurre la proprietà che le linee rette che uniscono i punti medii dei lati opposti di una figura quadrilatera qualunque si dividono scambievolmente per metà.

5. Una piramide poggia sopra una base quadrata: date le coordinate del vertice, e le coordinate di due vertici opposti della base, determinare le coordinate del centro di gravità della piramide.

6. ABC è un triangolo; D, E, F sono i punti medii dei suoi lati; mostrare che il centro di gravità dei *lati* di ABC coincide col centro del circolo inscritto in DEF.

7. Un pezzo di filo metallico è in forma di un triangolo; trovare la distanza del centro di gravità da ciascuno dei lati, e mostrare che se x, y, z sono le tre distanze, ed r il raggio del circolo inscritto, allora

$$4xyz - r^2(x+y+z) - r^3 = 0.$$

8. Se il centro di gravità di una figura di quattro lati coincide con uno dei suoi vertici, mostrare che le distanze di questo punto e del vertice opposto dalla linea che congiunge gli altri due vertici stanno come 1 a 2.

9. Mostrare che il centro comune di gravità di un triangolo isoscele rettangolo, e dei quadrati descritti sopra i due lati eguali, è ad una distanza $= \frac{\sqrt{2}}{15} a$ dal punto in cui quei lati s'incontrano, a essendo la lunghezza di uno di essi.

10. Dimostrare la seguente costruzione pel centro di gravità di un quadrilatero qualunque. Sia E l'intersezione delle diago-

nali, ed F il punto medio della linea retta che congiunge i loro punti medii; si tiri la linea retta EF e si prolunghi in G, facendo $FG = \frac{1}{3} EF$; allora G sarà il centro di gravità richiesto.

11. Un triangolo ABC è successivamente sospeso dagli angoli A e B, e le due posizioni di un lato qualunque sono ad angoli retti tra loro; mostrare che

$$5c^2 = a^2 + b^2.$$

12. Una lamina triangolare rettangola ABC è sospesa da un punto D nella sua ipotenusa AB; dimostrare che nella posizione di equilibrio AB sarà orizzontale se

$$AD : DB :: AB^2 + AC^2 : AB^2 + BC^2.$$

13. Un dato triangolo isoscele è inscritto in un cerchio; trovare il centro di gravità della rimanente area del cerchio.

14. Se tre verghe uniformi sono unite rigidamente in modo da formare la metà di un esagono regolare, dimostrare che sospendendo da uno degli angoli, una delle verghe sarà orizzontale.

15. Se ABC è un triangolo isoscele con un angolo retto in C, D, E sono i punti medii di AC, AB rispettivamente, dimostrare che la perpendicolare da E sopra BD passerà pel centro di gravità del triangolo BDC.

16. $ABCD$ è una figura piana quadrilatera qualunque, ed a, b, c, d sono rispettivamente i centri di gravità dei triangoli BCD, CDA, DAB, ABC; mostrare che il quadrilatero $abcd$ è simile ad $ABCD$.

17. A, B, C, D, E, F sono sei elementi eguali negli angoli di un esagono piano *qualunque*, ed a, b, c, d, e, f sono i centri di gravità rispettivamente di ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, ed FAB. Dimostrare che i lati e gli angoli opposti dell'esagono $abcdef$ sono eguali, e che le linee rette che congiungono gli angoli opposti passano per un punto, che è il centro di gravità degli elementi A, B, C, D, E, F.

18. Una linea retta ED stacca l' n^{ma} parte del triangolo rettangolo ABC di cui A è l'angolo retto. $AB=a$, $AC=b$. Mostrare che il centro di gravità di $CEDB$ descrive la curva che ha per equazione

$$\frac{ab}{n} = \{3(n-1)y - nb\}\{3(n-1)x - na\}.$$

19. La distanza del centro di gravità di un numero qualunque di lati AB, BC, CD, ... KL di un poligono regolare dal centro del cerchio inscritto

$$= \frac{AL \times \text{per il raggio}}{AB + BC + CD + \ldots\ldots + KL}.$$

20. Un tronco è tagliato da un cono retto con un piano che bisega l'asse ed è parallelo alla base; mostrare che esso starà in equilibrio col suo lato obliquo su di una tavola orizzontale se l'altezza del cono serba al diametro della sua base un rapporto maggiore di quello di $\sqrt{7}$ a $\sqrt{17}$.

21. Se elementi di pesi diseguali sono situati ai vertici di una piramide triangolare, e G_1 è il loro centro comune di gravità; G_2, G_3, ... sono i centri comuni di gravità per ogni possibile disposizione degli elementi; mostrare che il centro di gravità di elementi eguali posti in G_1, G_2, ... è il centro di gravità della piramide.

22. Se un cono ha la sua base unita concentricamente alla base di un emisfero di eguale raggio, trovare l'altezza del cono affinchè il solido possa stare in equilibrio su di una tavola orizzontale in un punto qualunque della sua superficie sferica.

Risultato. $r\sqrt{3}$.

23. Se un poligono qualunque è circoscritto ad un cerchio, il centro di gravità dell'*area* del poligono, il centro di gravità del *perimetro* del poligono, ed il centro del circolo, sono nella stessa linea retta; inoltre la distanza del primo punto dal terzo è due terzi della distanza del secondo punto dal terzo.

24. Se un poliedro qualunque è circoscritto ad una sfera, il centro di gravità del *volume* del poliedro, il centro di gravità della *superficie* del poliedro, ed il centro della sfera, sono nella stessa linea retta; inoltre la distanza del primo punto dal terzo è tre quarti della distanza del secondo punto dal terzo.

25. Da un cono retto in cui il diametro della base è eguale all'altezza è staccato un cilindro retto di cui il diametro della base è eguale all'altezza, i loro assi essendo nella stessa linea retta e la base del cilindro nella base del cono; dal cono rimanente è staccato un simile cilindro, e così di seguito, indefinitamente; mostrare che la distanza del centro di gravità di tutti i cilindri dalla base del cono è $\frac{3}{10}$ dell'altezza del cono, e che la

distanza del centro di gravità della rimanente porzione dalla base del cono è $\frac{17}{80}$ dell'altezza del cono.

26. Un quadrato è staccato da un triangolo equilatero, un lato del quadrato coincidendo con un lato del triangolo; dal triangolo equilatero che rimane è staccato un altro quadrato, e così di seguito, indefinitamente: trovare il centro di gravità della somma dei quadrati.

27. Trovare il centro di gravità dell'area contenuta tra le curve $y^2=ax$ ed $y^2=2ax-x^2$, che è al di sopra dell'asse delle x.

Risultati. $x' = a \cdot \frac{15\pi - 44}{15\pi - 40}$; $y' = \frac{a}{3\pi - 8}$.

28. Trovare il centro di gravità dell'area racchiusa dalla curva $r=a(1+\cos\theta)$.

Risultato. $x' = \frac{5}{6} a$.

29. Trovare il centro di gravità dell'area inclusa da un cappio della curva $r=a\cos 2\theta$.

Risultato. $x' = \frac{128a\sqrt{2}}{105\pi}$.

30. Trovare il centro di gravità dell'area inclusa da un cappio della curva $r=a\cos 3\theta$.

Risultato. $x' = \frac{81\sqrt{3a}}{80\pi}$.

31. Il luogo del centro di gravità di tutt'i segmenti eguali staccati da una parabola è una parabola eguale.

32. Trovare il centro di gravità di un segmento di circolo.

33. Trovare il centro di gravità dell'area inclusa dalle curve $y^2=ax$ ed $x^2=by$.

Risultato. $x' = \frac{9}{20} a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$, $y' = \frac{9}{20} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}$.

34. Trovare il centro di gravità di una porzione di un'iperbole equilatera limitata dalla curva, l'asse trasverso, ed un raggio vettore tirato dal centro.

Risultati. $x' = \frac{2y_1}{3\log(x_1+y_1) - 3\log a}$;

$$y' = \frac{2(x_1 - a)}{3\log(x_1+y_1) - 3\log a};$$

in cui x_1, y_1 sono le coordinate del punto d'intersezione della curva col raggio vettore limite.

35. Sono descritti due circoli eguali di raggio a, ciascuno che passa pel centro dell'altro, ed un terzo circolo li tocca entrambi, avendo uno dei loro punti d'intersezione per centro; la distanza del centrŏ di gravità dell'area più piccola inclusa tra il circolo esterno ed i circoli interni dal raggio comune dei primi due è

$$\frac{12 - 2\pi\sqrt{3}}{2\pi - 3\sqrt{3}}a.$$

36. La densità di un triangolo varia come l'n^{ma} potenza della distanza dalla base; determinare n quando il centro di gravità del triangolo divide la linea retta che congiunge il vertice col punto medio della base nel rapporto di 3 ad 1.

Risultato. $n = -\frac{1}{3}$.

37. Trovare il centro di gravità del volume formato dalla rotazione intorno all'asse delle x dell'area della curva $y^4 - axy^2 + x^4 = 0$.

Risultato. $x' = \frac{3a\pi}{32}$.

38. Trovare il centro di gravità del volume generato dalla rotazione dell'area nell'Es. 27 intorno all'asse delle y.

Risultato. $y' = \frac{5a}{2(15\pi - 44)}$.

39. Trovare il centro di gravità di un emisfero quando la densità varia come il quadrato della distanza dal centro.

Risultato. $x' = \frac{5a}{12}$.

40. Trovare il centro di gravità del solido generato da una semi-parabola limitata dal lato retto girando intorno al lato retto.

Risultato. Distanza dal fuoco $= \frac{5}{32}$ del lato retto.

41. Il solido incluso tra le superficie di un iperboloide continuo e del suo cono assintotico è tagliato da due piani perpendicolari al loro asse comune; trovare la posizione del centro di gravità di quella porzione che giace tra i piani.

Risultato. Ad eguale distanza dai piani.

42. Un settore solido di una sfera pende da un punto nel suo orlo circolare col suo asse orizzontale, trovare il suo angolo al vertice.

Risultato. Il coseno del semi-angolo al vertice è $\frac{3}{5}$.

43. Trovare il centro di gravità del solido generato dalla rotazione di un semicerchio intorno ad una linea retta perpendicolare al diametro, e che non incontra il semicerchio.

Risultato. Distanza dal piano generato dal diametro $= \frac{4r}{3\pi}$.

44. A è un punto nella linea generatrice di un cilindro retto a base circolare, e B, C sono due altri punti nella linea generatrice diametralmente opposta. Il cilindro è bisegato dal piano ABC, ed uno dei semi-cilindri è tagliato da due piani ad angoli retti su di ABC, che passano per AB ed AC. Mostrare che se il solido ABC è situato con la sua parte convessa sopra un piano orizzontale, il piano ABC sarà inclinato all'orizzonte sotto un angolo $\tan^{-1}\left(\frac{3}{16}\pi\right)$, quando vi è equilibrio.

45. Un cono solido è tagliato da due piani perpendicolari alla stessa sezione principale, uno per il *suo* asse, e l'altro parallelo ad un lato obliquo; trovare il valore limite dell'angolo al vertice del cono, affinchè la porzione tagliata possa stare in equilibrio con la sua superficie curva sopra di un piano orizzontale.

Risultato. Il coseno dell'angolo al vertice non deve essere maggiore di $\frac{5}{9}$.

46. Un quadrante di un circolo gira intorno ad uno dei suoi raggi estremi per un angolo di 30°; trovare il centro di gravità del solido generato, la densità essendo supposta variare come la distanza dal centro.

Risultati. $x' = \frac{3a}{5}$; $y' = \frac{3a}{5}(2 - \sqrt{3})$; $z' = \frac{2a}{5}$. L'asse delle x si suppone coincidere con la posizione iniziale del raggio girante.

47. Un solido è generato dalla rotazione dell'area della curva $y^{2n-2} = ax^{2-n}$ intorno all'asse delle x; mostrare che la distanza del centro di gravità di un segmento qualunque di questo solido dal vertice serba all'altezza del segmento il rapporto di 1 ad n. Il segmento si suppone staccato con un piano perpendicolare all'asse.

48. Trovare il centro di gravità della *superficie* del solido $z^2 + y^2 = 2ax$, tagliata dal piano $x = c$.

Risultato. $x' = \dfrac{(3c - a)(a + 2c)^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}}{5\{(a + 2c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\}}$.

49. Applicare il teorema di Guldino a trovare il volume del tronco di un cono retto in termini della sua altezza e dei raggi delle sue basi.

Risultato. $\dfrac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

50. Trovare la superficie ed il volume del solido generato dalla rotazione di una cicloide intorno alla sua base.

Risultati. $\dfrac{64\pi a^2}{3}$; $5\pi^2 a^3$.

51. Un segmento di cerchio gira intorno alla sua corda, che sottende un angolo di 90° al centro; trovare la superficie ed il volume del solido generato.

Risultati. $\dfrac{\pi a^2(4 - \pi)}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{a^3(10 - 3\pi)\pi}{6\sqrt{2}}$.

52. Un'ellisse di eccentricità $\dfrac{4}{3\pi}$ gira intorno ad una tangente. Dimostrare che il volume generato da una delle porzioni in cui l'ellisse è divisa dal suo asse minore varia inversamente come il volume generato dall'altra porzione.

53. Un'area piana si muove in modo da essere sempre normale alla curva secondo la quale si muove il suo centro di gravità; dimostrare che il volume generato è eguale all'area data moltiplicata per la lunghezza del cammino del centro di gravità.

Quindi trovare il volume di un tubo cicloidale la di cui sezione normale è di area costante.

54. Estendere il teorema di Guldino per trovare il volume di un anello al caso in cui l'anello è formato dalla rotazione di un'area piana intorno ad una linea retta *parallela* al suo piano.

Un anello è formato dalla rotazione di una lemniscata (di cui l'equazione è $r^2 = a^2 \cos 2\theta$) intorno ad una linea retta parallela al suo piano situata in un piano condotto pel suo punto doppio e perpendicolare al suo asse; mostrare che il volume di questo anello è $\dfrac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$.

CAPITOLO IX.

Fili flessibili ed inestensibili.

144. Un filo si dice essere *perfettamente flessibile* quando una forza qualunque, comunque piccola, che è applicata non secondo la direzione del filo cambierà la sua forma. Per brevità, usiamo la parola *flessibile* come equivalente a *perfettamente flessibile*. Alle volte la parola *catena* è usata come sinonimo di *filo*.

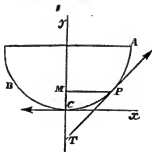
Se un filo flessibile è mantenuto in equilibrio da due forze, una a ciascun estremo, ammettiamo come evidente che queste forze debbono essere eguali ed agire in direzioni opposte, sicchè il filo prende la forma di una linea retta nella direzione delle forze. In questo caso la *tensione* del filo è misurata dalla forza applicata in un estremo.

Rappresenti ABC un filo mantenuto in equilibrio da una forza T in un estremo A e da una forza eguale T all'altro estremo C agenti in direzioni opposte secondo la linea AC. Poichè una porzione qualunque AB del filo è in equilibrio ne segue che una forza T deve agire su di AB in B da B verso C per bilanciare la forza che agisce in A; e similmente, una forza T deve agire su di BC da B verso A affinchè BC sia in equilibrio. Questo risultato si esprime dicendo che *la tensione del filo è la stessa da per tutto*.

A meno che non si esprima il contrario, un filo si suppone *inestensibile* ed il contorno di una sua sezione trasversale si suppone essere una curva, ogni corda della quale è indefinitamente piccola.

145. Quando un filo flessibile è sollecitato da altre forze oltre di una in ciascun estremo esso può prendere nell'equilibrio una forma *curvilinea*. Se in un punto qualunque della curva supponiamo fatta una sezione con un piano perpendicolare alla tangente, le azioni scambievoli delle porzioni in parti opposte di questo piano debbono essere nella direzione della tangente, altrimenti non si avrebbe l'equilibrio, poichè il filo è perfettamente flessibile.

146. *Un filo pesante di uniforme densità e spessezza è sospeso da due punti fissi; si cerca l'equazione della curva nella quale si dispone il filo quando è in equilibrio.*

Siano A,B i punti fissi ai quali sono legati gli estremi; il filo starà in un *piano verticale* che passa per A e B, non essendovi alcuna ragione perchè dovesse deviare da una parte piuttosto che dall'altra di questo piano verticale. Sia ACB la forma che esso prende, C essendo il punto più basso; si prenda questo come origine delle coordinate; sia P un punto qualunque nella curva; CM, che è verticale, $= y$; MP, che è orizzontale, $= x$; $CP = s$.

L'equilibrio di una porzione qualunque CP non sarà turbato se la supponiamo divenire rigida. Siano c e t le lunghezze delle porzioni del filo di cui i pesi sono eguali alle tensioni in C e P. Allora CP è un corpo solido sollecitato da tre forze proporzionali a c, s, e t, ed agenti rispettivamente, orizzontalmente, verticalmente, e secondo la tangente in P. Si tiri PT tangente in P che incontra l'asse delle y in T; allora le forze che mantengono CP in equilibrio hanno le loro direzioni parallele ai lati del triangolo PMT, e quindi serbano tra loro la stessa proporzione come questi lati (si vegga l'Art. 19); quindi

$$\frac{PM}{MT} = \frac{\text{tensione nel punto più basso}}{\text{peso della porzione } CP}, \text{ o sia } \frac{dx}{dy} = \frac{c}{s},$$

quindi
$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{(c^2 + s^2)}};$$

onde
$$y + c = \sqrt{(c^2 + s^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

la costante aggiunta essendo tale che $y=0$ quando $s=0$; quindi

$$s^2 = y^2 + 2yc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Inoltre
$$\frac{dx}{dy} = \frac{c}{s} = \frac{c}{\sqrt{(y^2 + 2yc)}},$$

quindi
$$x = c \log \frac{y + c + \sqrt{(y^2 + 2yc)}}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

la costante essendo scelta in modo che x ed y svaniscano insieme. L'ultima equazione dà

$$ce^{\frac{x}{c}} = y + c + \sqrt{(y^2 + 2yc)}.$$

Si trasponga e si elevi a quadrato; così

$$c^2e^{\frac{2x}{c}} - 2(y+c)ce^{\frac{x}{c}} + c^2 = 0\ ;$$

quindi $$y + c = \frac{1}{2}c\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \text{ .... (4).}$$

Ancora $$s = \sqrt{\{(y+c)^2 - c^2\}} \text{ per (2)}$$

$$= \frac{1}{2}c\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) \text{ .... (5).}$$

Una qualunque di queste cinque equazioni si può prendere come equazione della curva. Se nell'equazione (4) scriviamo y' per $y+c$, il che corrisponde a trasportare l'origine in un punto verticalmente al di sotto del punto più basso della curva ad una distanza c da esso, abbiamo

$$y' = \frac{1}{2}c\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Quando il filo è uniforme in densità e spessezza, come nell'esempio presente, la curva si chiama la *catenaria ordinaria*.

147. *Trovare la tensione del filo in un punto qualunque.*

Sia la tensione in P eguale al peso di una lunghezza t del filo; allora, come si è mostrato nell'ultimo articolo,

$$\frac{\text{tensione in } P}{\text{peso di } CP} = \frac{PT}{TM},\ \text{quindi}\ \frac{t}{s} = \frac{ds}{dy}.$$

Ma $s^2 = y^2 + 2yc$ per l'equazione (2) dell'Art. 146, quindi

$$t = y + c = y'.$$

Ciò mostra che la tensione in un punto qualunque è il peso di una porzione del filo di cui la lunghezza è l'ordinata di quel punto, l'origine essendo ad una distanza c al di sotto del punto più basso.

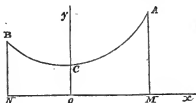
Quindi, se un filo uniforme pende liberamente sopra due punti qualunque, le estremità del filo giaceranno nella stessa linea orizzontale quando il filo è in equilibrio.

148. *Determinare la costante* c, *essendo dati i punti di sospensione e la lunghezza del filo.*

Siano A e B le estremità fisse, C il punto più basso della curva.

$$OC = c, \quad OM = a,$$
$$ON = a', \quad MA = b,$$
$$NB = b', \quad CA = l, \quad CB = l'.$$

Inoltre sia

$$\left.\begin{aligned} a + a' &= h \\ b - b' &= k \\ l + l' &= \lambda \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1);$$

allora h, k, λ sono quantità note, poichè la lunghezza del filo e le posizioni dei suoi estremi sono date. Dall' Art. 146

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{a}{c}} + c^{-\frac{a}{c}} \right) \\ b' &= \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{a'}{c}} + e^{-\frac{a'}{c}} \right) \\ l &= \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}} \right) \\ l' &= \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{a'}{c}} - e^{-\frac{a'}{c}} \right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Le equazioni (1) e (2) sono teoreticamente sufficienti per abilitarci ad eliminare a, a', b, b', l, ed l' e a determinare c. Possiamo dedurre da esse

$$\lambda = \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}} + e^{\frac{a'}{c}} - e^{-\frac{a'}{c}} \right),$$

$$k = \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}} - e^{\frac{a'}{c}} - e^{-\frac{a'}{c}} \right);$$

quindi

$$\lambda + k = c \left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a'}{c}} \right),$$

$$\lambda - k = c \left(e^{\frac{a'}{c}} - e^{-\frac{a}{c}} \right);$$

quindi $$\lambda^2 - k^2 = c^2\left(e^{\frac{a+a'}{c}} + e^{-\frac{a+a'}{c}} - 2\right)$$

$$= c^2\left(e^{\frac{h}{c}} + e^{-\frac{h}{c}} - 2\right);$$

quindi $$\sqrt{(\lambda^2 - k^2)} = c\left(e^{\frac{h}{2c}} - e^{-\frac{h}{2c}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Questa è l'equazione dalla quale si deve trovare c, ma a motivo della sua forma trascendente essa si può risolvere solamente per approssimazione. Se gli esponenti di e sono piccoli, possiamo sviluppare col teorema esponenziale e così ottenere il valore approssimato di c. Affinchè gli esponenti siano piccoli, c deve essere grande in paragone di h; poichè $\frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{(c^2+s^2)}}$ per l'Art. 146 ne segue che quando c è grande in paragone della lunghezza del filo, $\frac{dy}{ds}$ è piccolo, e quindi la curva non devia molto da una linea retta. Quindi quando i due punti di sostegno sono presso a poco in una linea orizzontale e la distanza tra essi è presso a poco eguale alla data lunghezza del filo, possiamo concludere che $\frac{h}{c}$ sarà piccolo. In questo caso, abbiamo da (3)

$$\sqrt{(\lambda^2 - k^2)} = 2c\left\{\frac{h}{2c} + \frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{h}{2c}\right)^3 + \frac{1}{\lfloor 5}\left(\frac{h}{2c}\right)^5 + \ldots\right\};$$

quindi $$\sqrt{(\lambda^2 - k^2)} = h + \frac{h^3}{24c^2} \text{ approssimativamente.}$$

149. *Trovare le equazioni di equilibrio quando un filo flessibile è sollecitato da forze qualunque.*

Siano x,y,z le coordinate di un punto P del filo; dinoti s la lunghezza della curva BP misurata da un punto fisso B sino a P, e δs la lunghezza dell'arco PQ tra P ed un punto adiacente Q. Sia $\varkappa$ l'area di una sezione del filo in P, e ρ la densità in P; sia T la tensione del filo in P; allora $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, e $T\frac{dz}{ds}$ sono le parti risolute di T parallele agli assi coordinati; e le parti risolute della tensione in Q parallele agli assi saranno, pel Teorema di Taylor,

$$T\frac{dx}{ds}+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)\delta s+\text{termini in }(\delta s)^2,\text{ etc.},$$

$$T\frac{dy}{ds}+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)\delta s+\ldots\ldots,$$

$$T\frac{dz}{ds}+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)\delta s+\ldots\ldots.$$

Siano $X\rho\varkappa\delta s$, $Y\rho\varkappa\delta s$, $Z\rho\varkappa\delta s$ le forze esterne che agiscono sull'elemento PQ parallelamente agli assi. L'equilibrio dell'elemento non sarà turbato supponendolo diventare rigido; quindi per l'Art. 27, la somma delle forze parallele all'asse delle x deve svanire; così

$$T\frac{dx}{ds}+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)\delta s+\ldots+X\rho\varkappa\,\delta s-T\frac{dx}{ds}=0\,,$$

o sia
$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+X\rho\varkappa=0 \text{ ultimamente.}$$

Similmente
$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Y\rho\varkappa=0,$$

e
$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+Z\rho\varkappa=0.$$

Il prodotto $\varkappa\rho$ si può rimpiazzare convenientemente con m, sicchè se m è costante ml rappresenta la massa di una lunghezza l del filo, e quindi m la massa di un'unità di lunghezza del filo. Se m non è costante, si concepisca un filo che abbia la sua lunghezza eguale all'unità di lunghezza e la sua sezione e densità da per tutto le stesse di quelle del dato filo nel punto (x,y,z), ed allora m sarà la massa di questo supposto filo.

L'elemento δs del filo, di cui abbiamo considerato l'equilibrio, diviene tanto più prossimamente un *punto materiale* quanto più si diminuisce δs; quindi è sufficiente di considerare le tre equazioni dell'Art. 27 invece delle sei equazioni dell'Art. 73.

Le tre equazioni che abbiamo trovato sono teoreticamente sufficienti per determinare T, y, e z come funzioni di x, rammentando che $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}$; e quando conosciamo i valori di y e z in termini di x, conosciamo le equazioni della curva che forma il filo.

150. Le equazioni per l'equilibrio di un filo flessibile si possono scrivere così;

$$\left.\begin{aligned} T\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds}+mX=0 \\ T\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds}+mY=0 \\ T\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{dT}{ds}\frac{dz}{ds}+mZ=0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (1).$$

Si moltiplichino queste equazioni per $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$, e $\frac{dz}{ds}$ rispettivamente e si sommino; allora, poichè

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

e
$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

abbiamo
$$\frac{dT}{ds}+m\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)=0 \dots (2);$$

quindi
$$T+\int m\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds = \text{costante} \dots (3).$$

Se le forze sono tali che $m(Xdx+Ydy+Zdz)$ è il differenziale immediato di una funzione di x,y,z, come $f(x,y,z)$, allora

$$T+f(x,y,z)=\text{costante}.$$

Se le forze sono tali che la loro risultante in ogni punto della curva è perpendicolare alla tangente in quel punto, abbiamo

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0,$$

quindi, per (3), T è costante.

Nelle equazioni (1) si traspongano i termini mX, mY, mZ a dritta, indi si elevi a quadrato e si sommi; così

$$T^2\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}+\left(\frac{dT}{ds}\right)^2=m^2(X^2+Y^2+Z^2).$$

Quindi se ρ è il raggio della curvatura assoluta della curva for-

mata dal filo, ed $Fm\delta s$ la forza esterna risultante sull'elemento δs, sicchè $F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$,

$$\left(\frac{T}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 = m^2 F^2 \;.............. \;(4).$$

Se T è costante $\frac{dT}{ds}=0$; quindi in questo caso mF varia come $\frac{1}{\rho}$.

Dalle equazioni di equilibrio nell'Art. 149, deduciamo con l'integrazione,

$$T\frac{dx}{ds} = -\int mX\, ds\,,$$

$$T\frac{dy}{ds} = -\int mY\, ds\,,$$

$$T\frac{dz}{ds} = -\int mZ\, ds\,.$$

Si elevi a quadrato e si sommi; allora

$$T^2 = \left\{\int mX\, ds\right\}^2 + \left\{\int mY\, ds\right\}^2 + \left\{\int mZ\, ds\right\}^2 \;..... \;(5).$$

Le costanti che s'introducono quando integriamo le equazioni differenziali di equilibrio debbono essere determinate dalle circostanze speciali di ciascun problema particolare. Così possono essere date le coordinate dei punti fissi ai quali sono legate le estremità del filo, e la lunghezza del filo. O pure, oltre delle forze rappresentate da $mX\delta s$, $mY\delta s$, ed $mZ\delta s$ agenti su ciascun elemento, possono agire delle forze date F_1 ed F_2 alle estremità del filo; in questo caso se T_1 e T_2 dinotano i valori di T nelle due estremità del filo, dobbiamo avere T_1 eguale in grandezza ad F_1 ed opposta ad essa in direzione e similmente per T_2 ed F_2.

151. Dalle equazioni (1) dell'Art. 150, si eliminino T e $\frac{dT}{ds}$; allora abbiamo

$$X\left(\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dz}{ds} - \frac{d^2z}{ds^2}\frac{dy}{ds}\right) + Y\left(\frac{d^2z}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dz}{ds}\right)$$

$$+ Z\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}\right) = 0;$$

ciò mostra che la forza esterna risultante che agisce sopra un elemento δs del filo giace nel piano osculatore nel punto (x,y,z).

152. Le equazioni generali di equilibrio diventano, quando tutte le forze sono in un piano, propriamente quello delle (x,y),

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+mX=0,\quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+mY=0 \;\ldots\; (1).$$

Si supponga $X=0$, sicchè la forza esterna sia parallela all'asse delle y; la prima equazione dà

$$T\frac{dx}{ds}=\text{ad una costante, } C \text{ poniamo},$$

quindi
$$T=\frac{C}{\frac{dx}{ds}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Quindi la seconda equazione diviene

$$C\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)+mY=0,$$

o
$$C\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{ds}+mY=0 \;\ldots\ldots\ldots\; (3).$$

Per esempio; si cerchi la forma della curva quando il suo peso è la sola forza che agisce su di essa, e l'area della sezione in ogni punto è proporzionale alla tensione in quel punto. Qui Y è costante e si può dinotare con $-g$, l'asse delle y essendo diretto verticalmente in su. E T varia come m, sicchè $T=\lambda m$ dove λ è una costante. Così da (2) e (3) otteniamo

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\frac{g}{\lambda}.$$

Si ponga a per $\frac{\lambda}{g}$; così $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\frac{1}{a}$,

quindi
$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{1}{a},$$

quindi
$$\tan^{-1}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{a}+\text{costante}.$$

La costante svanisce se supponiamo l'origine nel punto più basso della curva; quindi

$$\frac{dy}{dx}=\tan\frac{x}{a};$$

onde
$$\frac{y}{a} = -\log\cos\frac{x}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Poichè in questo caso l'area della sezione in ogni punto è proporzionale alla tensione in quel punto, la curva determinata da (4) si chiama la *Catenaria di eguale resistenza*.

Poichè $T = \lambda m = mag$, abbiamo il seguente risultato: la tensione in ogni punto è eguale al peso di una lunghezza a di un filo uniforme della stessa area e densità che il filo ha attualmente nel punto considerato.

153. Le equazioni (1) dell'Articolo precedente si possono scrivere
$$T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + mX = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$
$$T\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds} + mY = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si moltiplichi (1) per $\frac{dy}{ds}$ e (2) per $\frac{dx}{ds}$ e si sottragga; così
$$T\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}\right) + m\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$
dalla quale, essendo $\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0$, troviamo
$$T = \frac{m\frac{dx}{ds}}{\frac{d^2y}{ds^2}}\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ancora, si moltiplichi (1) per $\frac{dx}{ds}$ e (2) per $\frac{dy}{ds}$ e si sommi; allora
$$\frac{dT}{ds} + m\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Da (3) e (4) eliminando T, deduciamo
$$m\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}\right) + \frac{d}{ds}\left\{\frac{m\frac{dx}{ds}}{\frac{d^2y}{ds^2}}\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right)\right\} = 0,$$
che è l'equazione generale della curva quando le forze date agiscono in un piano.

154. Nell' Art. 150 abbiamo trovato le equazioni

$$\frac{dT}{ds} + m\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) = 0 \text{ .... } (1),$$

$$\left(\frac{T}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 = m^2 F^2 \text{ .... } (2).$$

Sia φ l'angolo che la forza risultante $mF\delta s$ fa con la tangente nel punto (x,y,z); allora

$$F\cos\varphi = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds};$$

quindi, per (1),

$$\frac{dT}{ds} = -mF\cos\varphi \text{ .... } (3),$$

e quindi, per (2),

$$\left(\frac{T}{\rho}\right)^2 = m^2 F^2 \operatorname{sen}^2\varphi \text{ .... } (4).$$

Se la forza è tale che la sua direzione passi sempre per un punto fisso, l' intero filo giacerà in un piano che passa per le sue estremità e pel punto fisso, non essendovi alcuna ragione perchè esso dovesse cadere da una parte piuttosto che dall' altra di questo piano. Sia r la distanza del punto (x,y,z) della curva dal punto fisso, p la perpendicolare dal punto fisso sulla tangente in (x,y,z); allora (3) e (4) si possono scrivere

$$\frac{dT}{ds} = -mF\frac{dr}{ds} \text{ .... } (5),$$

$$\frac{T}{\rho} = mF\frac{p}{r} \text{ .... } (6).$$

Quindi $$\frac{1}{T}\frac{dT}{ds} = -\frac{r}{\rho p}\frac{dr}{ds} = -\frac{1}{p}\frac{dp}{ds};$$

quindi $$\log T = \text{costante} - \log p,$$

o $$Tp = C.$$

Inoltre, da (5), $$T = -\int mF\,dr.$$

Quindi $$\frac{C}{p} = -\int mF\,dr.$$

Si ponga $\varphi(r)$ per $-\int mF\,dr$; allora

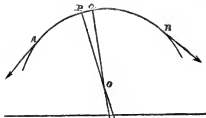
$$\varphi(r)=\frac{C}{p}=C\left\{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

e da questa equazione differenziale si deve trovare la relazione tra r e θ.

L'equazione $Tp=C$ si può anche ottenere semplicemente così: supponiamo che una porzione finita del filo diventi rigida; questa porzione è sollecitata dalle tensioni nelle sue due estremità e da *altre forze che passano tutte per un punto fisso*; si prendano i momenti intorno a questo punto fisso; quindi il prodotto della tensione nella perpendicolare dal punto fisso sulla tangente deve avere lo stesso valore nelle due estremità della porzione finita del filo. Così $Tp=$costante.

155. *Un filo è disteso sopra una curva piana levigata; trovare la tensione in ogni punto e la pressione sulla curva.*

Supponiamo da principio che si trascuri il peso del filo.

Sia $APQB$ il filo, A e B essendo i punti in cui esso lascia la

curva. Siano P, Q punti adiacenti nel filo; le normali della curva in P e Q s'incontrino in O; sia θ l'angolo che PO fa con una linea retta fissa, e $\theta+\delta\theta$ l'angolo che QO fa con la stessa linea. L'elemento PQ è sollecitato da una tensione in P secondo la tangente in P, una tensione in Q secondo la tangente in Q, e la resistenza della curva levigata che agirà ultimamente secondo PO.

Sia s la lunghezza della curva misurata da un punto fisso sino a P, e $PQ=\delta s$; dinoti $R\delta s$ la resistenza della curva sopra PQ, T la tensione in P, $T+\delta T$ la tensione in Q. Supponiamo che l'elemento PQ diventi rigido, e si risolvano le forze che agiscono su di esso secondo la tangente e la normale in P; allora

$$T-(T+\delta T)\cos\delta\theta=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1),$$

$$R\delta s-(T+\delta T)\,\mathrm{sen}\,\delta\theta=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Ora $$\cos\delta\theta = 1 - \frac{(\delta\theta)^2}{1\cdot 2} + \frac{(\delta\theta)^4}{\underline{|4}} - \dots$$

quindi (1) dà con la divisione per $\delta\theta$

$$\frac{\delta T}{\delta\theta} - (T+\delta T)\left\{\frac{\delta\theta}{2} - \frac{(\delta\theta)^3}{\underline{|4}} + \dots\right\} = 0\,;$$

quindi ultimamente $$\frac{dT}{d\theta} = 0\,,$$

onde $$T = \text{costante}, \quad \dots\dots (3).$$

Inoltre $\delta s = \rho\delta\theta$ ultimamente, ρ essendo il raggio di curvatura in P, quindi, da (2), abbiamo

$$R = \frac{T}{\rho} \quad \dots\dots (4).$$

Poichè T è costante, il filo non sarà in equilibrio a meno che le forze che tirano le sue due estremità non siano eguali.

La pressione *totale* sulla curva sarà $\int Rds$; quindi da (4), l'intera pressione

$$= \int \frac{T}{\rho}\,ds = \int T d\theta.$$

Poichè T è costante, $\int T d\theta = T\theta + \text{costante}$;

quindi la pressione totale $= T(\theta_2 - \theta_1)$, supponendo θ_1 il valore di θ in A, e θ_2 il valore di θ in B.

Supponiamo ora che si tenga conto del peso del filo. Si prenda l'asse delle y orizzontale e quello delle x diretto verticalmente in giù. Sia $mg\delta s$ il peso dell'elemento PQ. Ragionando come sopra, si troveranno analogamente ad (1) e (2) le equazioni

$$T - (T+\delta T)\cos\delta\theta - mg\delta s \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \dots\dots (5),$$

$$R\delta s - (T+\delta T)\operatorname{sen}\delta\theta - mg\delta s \cos\theta = 0 \quad \dots\dots (6),$$

in cui θ è l'angolo acuto che la normale della curva in P fa con l'asse delle x.

Da (5) otteniamo ultimamente

$$\frac{dT}{ds} = -mg \operatorname{sen}\theta \quad \dots\dots (7),$$

e da (6) $$R = \frac{T}{\rho} + mg\cos\theta \quad \dots\dots (8),$$

in cui ρ è il raggio di curvatura della curva in P.

Poichè la curva si suppone essere conosciuta, s e ρ si possono supporre funzioni cognite di θ; così (7) ed (8) ci faranno trovare T ed R in termini di θ. O pure possiamo esprimere T ed R in termini delle coordinate rettangolari del punto P; infatti se dinotiamo queste coordinate con x ed y, abbiamo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dx}{ds}, \cos\theta = \frac{dy}{ds};$$

così (7) si può scrivere

$$\frac{dT}{ds} = -mg\frac{dx}{ds};$$

quindi, se m è costante,

$$T = -mgx + C,$$

in cui C è una costante; si conoscerà il valore di questa costante conoscendo la tensione del filo in un punto dato, per esempio in A o in B.

Inoltre da (8)

$$R = \frac{C - mgx}{\rho} + mg\frac{dy}{ds};$$

e ρ e $\frac{dy}{ds}$ si conosceranno in termini di x ed y poichè la curva è conosciuta.

156. *Formare le equazioni di equilibrio di un filo disteso sopra una superficie levigata e sollecitato da forze qualunque.*

Sia s la lunghezza del filo misurata da un punto fisso B sino al punto P; siano x,y,z le coordinate di P; δs la lunghezza dell'elemento del filo tra P ed un punto adiacente Q; $m\delta s$ la massa dell'elemento; $R\delta s$ la resistenza della superficie su questo elemento, la direzione della quale sarà ultimamente la normale della superficie in P; siano α,β,γ gli angoli che la normale in P fa con gli assi; $Xm\delta s$, $Ym\delta s$, $Zm\delta s$ le forze parallele agli assi che agiscono sull'elemento, esclusa la resistenza $R\delta s$. Quindi, nell'equazioni dell'Art. 149, per Xm possiamo porre $Xm+R\cos\alpha$, e fare simili sostituzioni per Ym e Zm; quindi

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + Xm + R\cos\alpha = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (1),$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Ym + R\cos\beta = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (2),$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Zm + R\cos\gamma = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (3).$$

Si moltiplichi (1) per $\frac{dx}{ds}$, (2) per $\frac{dy}{ds}$, e (3) per $\frac{dz}{ds}$, e si addizioni; allora, poichè

$$\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma = 0\,,$$

essendo una tangente alla superficie in un punto qualunque perpendicolare alla normale in quel punto, abbiamo, come nell' Art. 150,

$$\frac{dT}{ds} + m\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) = 0 \;\;\ldots\ldots\ldots\; (4).$$

Ancora, si moltiplichi (1) per $\cos\alpha$, (2) per $\cos\beta$, e (3) per $\cos\gamma$, e si addizioni; allora

$$T\left\{\frac{d^2x}{ds^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{ds^2}\cos\beta + \frac{d^2z}{ds^2}\cos\gamma\right\}$$
$$+ m\,\{X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma\} + R = 0 \;\ldots\; (5).$$

Sia $Fm\delta s$ la risultante di $Xm\delta s$, $Ym\delta s$, $Zm\delta s$, e ψ l'angolo che la sua direzione fa con la normale alla superficie nel punto (x,y,z); allora

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = F\cos\psi.$$

Sia ρ il raggio di curvatura assoluta della curva formata dal filo nel punto (x,y,z); siano α',β',γ' gli angoli che la sua direzione fa con gli assi; φ l'angolo che la sua direzione fa con la normale alla superficie; allora

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\cos\alpha'}{\rho}\,,\quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\cos\beta'}{\rho}\,,\quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\cos\gamma'}{\rho}\,.$$

Quindi (5) diviene

$$\frac{T}{\rho}\cos\varphi + Fm\cos\psi + R = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6).$$

Sia $u = 0$ l'equazione della superficie; allora

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{du}{dx}} = \frac{\cos\beta}{\frac{du}{dy}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{du}{dz}} = N \text{ supponiamo.}$$

Quindi (1) si può scrivere

$$T\frac{d^2x}{ds^2} + Xm + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + RN\frac{du}{dx} = 0 ,$$

e (2) e (3) si possono esprimere similmente.

Si eliminino $\frac{dT}{ds}$ ed RN, ed otteniamo

$$\left(T\frac{d^2x}{ds^2} + Xm\right)\left(\frac{dy}{ds}\frac{du}{dz} - \frac{dz}{ds}\frac{du}{dy}\right)$$
$$+ \left(T\frac{d^2y}{ds^2} + Ym\right)\left(\frac{dz}{ds}\frac{du}{dx} - \frac{dx}{ds}\frac{du}{dz}\right)$$
$$+ \left(T\frac{d^2z}{ds^2} + Zm\right)\left(\frac{dx}{ds}\frac{du}{dy} - \frac{dy}{ds}\frac{du}{dx}\right) = 0.$$

Se poniamo per T il suo valore da (4), l'equazione risultante, insieme con $u=0$, determinerà la curva formata dal filo.

Apparisce dall'Art. 151 che la risultante di $Fm\delta s$ ed $R\delta s$ deve giacere nel piano osculatore della curva nel punto (x,y,z). Se la direzione di $Fm\delta s$ è sempre normale alla superficie $u=0$, poichè quella di $R\delta s$ è anche normale alle superficie, ne segue che *la normale della superficie giace nel piano osculatore della curva.* Questa sappiamo essere una proprietà della linea di massima o minima lunghezza che si può tracciare sopra una superficie tra due punti dati. Quindi, allorchè un filo è disteso sopra una superficie levigata ed è sollecitato solamente da forze che sono nelle direzioni delle normali della superficie nei loro punti di applicazione, esso forma la linea di massima o minima lunghezza che si può tracciare sulla superficie tra i punti estremi del suo contatto con la superficie.

Quando $Fm\delta s$ è sempre normale alla superficie, segue da (4) che T è costante.

157. Daremo ora gli enunciati di alcuni teoremi, di facile dimostrazione, connessi con l'argomento dei fili flessibili.

I. Sia un filo qualunque in equilibrio, supponendo le sue estremità fisse e la gravità la sola forza: allora *il centro di gravità di una porzione qualunque del filo si troverà verticalmente al di sopra del punto d'intersezione delle tangenti nelle estremità della porzione.*

II. Si supponga un filo flessibile in equilibrio sotto l'azione di una forza centrale. Allora *l'azione risultante della forza cen-*

trale sopra una porzione qualunque del filo è diretta secondo la linea retta che congiunge il centro della forza col punto d'intersezione delle tangenti nelle estremità della porzione.

III. Supponiamo che un filo flessibile sia in equilibrio sotto l'azione di una forza centrale che varia come la distanza. Allora *la linea retta che congiunge il centro di gravità di una porzione qualunque del filo col centro di forza coincide con la direzione della forza centrale risultante sulla porzione.*

Combinando questo teorema col precedente si ottiene la seguente proprietà del filo flessibile che è in equilibrio sotto l'azione di una forza centrale che varia come la distanza: *Il centro di gravità di una porzione qualunque si trova sulla linea retta che congiunge il centro di forza col punto d'intersezione delle tangenti nelle estremità della porzione.*

IV. Supponiamo che un filo pesante non di uniforme densità e spessezza sia sospeso da due punti fissi; e sia in equilibrio. Sia t la tensione in un punto qualunque, θ l'angolo che la tangente in quel punto fa con l'orizzonte; allora $t \cos\theta$ sarà costante. Infatti s'immagini che una porzione qualunque del filo diventi rigida, allora le sole forze orizzontali che agiscono su di essa sono le parti risolute delle tensioni in ciascuna estremità; e queste debbono perciò essere eguali in grandezza: quindi

$$t \cos\theta = \text{costante} = \tau \text{ supponiamo } \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Sia w il peso della porzione del filo contenuta tra un punto fisso qualunque ed il punto variabile che si considera. Allora risolvendo le forze verticalmente otteniamo in simil modo

$$t \operatorname{sen}\theta - w = \text{costante};$$

onde

$$w = \tau \tan\theta + \text{costante} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Inoltre risolvendo le forze che agiscono su di un elemento secondo la normale troviamo

$$\frac{t}{\rho} - gm \cos\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

in cui ρ è il raggio di curvatura e $gm\delta s$ si prende per il peso dell'elemento δs. Quindi da (1) e (3),

$$\frac{\tau}{\rho} = gm \cos^2\theta.$$

ESEMPII.

1. Nella catenaria ordinaria mostrare che il peso del filo tra il punto più basso ed un altro punto qualunque è la media geometrica tra la somma e la differenza delle tensioni nei due punti.

2. Se α e β sono le inclinazioni all'orizzonte delle tangenti nelle estremità di una porzione di una catenaria ordinaria, ed l è la lunghezza della porzione, mostrare che l'altezza di una estremità sull'altra è

$$l \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}};$$

la porzione si suppone essere tutta dalla stessa parte del punto più basso.

3. Una catena pesante uniforme lunga 110 piedi è sospesa da due punti nello stesso piano orizzontale alla distanza tra loro di 108 piedi; mostrare che la tensione nel punto più basso è prossimamente 1,477 volte il peso della catena.

4. Una catena uniforme di lunghezza $2l$ è sospesa da due punti fissi nello stesso piano orizzontale; $2a$ è la distanza tra i punti fissi e c la lunghezza della catena il di cui peso è eguale alla tensione nel punto più basso; mostrare che quando l è tale che la tensione nei punti di sospensione è la minima possibile quella tensione è eguale al peso di una lunghezza $\frac{al}{c}$ della catena, ed l e c sono determinate da

$$l = \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}} \right), \quad (l^2 + c^2) c^2 = a^2 l^2.$$

5. Se una catena uniforme è fissa a due punti, ed un numero qualunque di anelli $A, B, C, \ldots$ sono in libertà di muoversi lungo linee orizzontali levigate nello stesso piano verticale, dimostrare che le parti AB, BC, CD, ... si conformeranno in curve che saranno tutte archi della stessa catenaria.

6. Tre anelli di una catena A, B, e C sono mobili liberamente lungo tre linee rette orizzontali rigide nello stesso piano verticale. Se quando A e C sono tirati tanto lontano tra loro quanto è possibile, le loro distanze orizzontali da B sono eguali, mo-

strare che ciò avverrà sempre quando esse sono tenute in ogni altra posizione.

7. Una catena pende in equilibrio sopra due punti levigati che sono in una linea orizzontale e ad una data distanza tra loro; trovare la minima lunghezza della catena affinchè l'equilibrio sia possibile.

Risultato. La minima lunghezza è he, in cui h è la data distanza.

8. Dimostrare che l'operazione necessaria per mantenere un cervo volante diminuisce a misura che esso s'innalza, la forza del vento essendo indipendente dall'altezza, e trascurandosi la pressione del vento sul filo.

9. Un filo pesante uniforme è in equilibrio sopra un arco di una curva levigata il di cui piano è verticale, mostrare che la tensione in ogni punto è proporzionale alla sua altezza verticale al di sopra del punto più basso del filo. Se il filo poggia sopra una parabola il di cui asse è verticale, determinare la distanza verticale delle sue estremità al di sotto del punto più alto affinchè la pressione in questo punto sia eguale a due volte il peso di un'unità di lunghezza del filo.

Risultato. La distanza verticale è eguale alla metà del lato retto della parabola.

10. Un estremo di una catena pesante uniforme pende liberamente sullo spigolo di una tavola levigata, e l'altro estremo passando su di una carrucola fissa arriva alla stessa distanza al d. sotto della tavola di quella della carrucola al di sopra di essai Supponendo che la metà della catena sia sulla tavola nella posizione di equilibrio, paragonare la sua lunghezza totale con l'altezza della carrucola.

Risultato. La lunghezza sta all'altezza come $6+2\sqrt{3}$ sta ad 1.

11. Una catena pesante uniforme è legata alle sue estremità a due anelli di pesi eguali che scorrono sopra verghe levigate intersegantisi in un piano verticale ed inclinate sotto lo stesso angolo α alla verticale; trovare la condizione affinchè la tensione nel punto più basso sia eguale alla metà del peso della catena; ed in questo caso mostrare che la distanza verticale degli anelli dal punto d'intersezione delle verghe è

$$\frac{l}{2}\cot\alpha\log(1+\sqrt{2}),$$

in cui l è la lunghezza della catena.

12. La densità in un punto qualunque di una catenaria di densità variabile varia come il raggio di curvatura; determinare l'equazione della catenaria.

Risultato. La curva dell'Art. 152.

13. Una corda pesante con un estremo fisso ad un punto nella superficie di un cilindro orizzontale levigato passa al di sotto del cilindro e poi al di sopra, l'altro estremo potendo pendere liberamente. Mostrare che se la porzione che pende verticalmente non è maggiore del diametro del cilindro, la corda si svolgerà, in modo da pendere dal punto fisso senza passare al di sotto del cilindro.

14. Se un filo uniforme pende in forma di una parabola per l'azione solamente di forze normali, la forza in ogni punto P varia come $(SP)^{-\frac{3}{2}}$, S essendo il fuoco.

15. Un filo uniforme sollecitato da una forza centrale prende la forma di un arco di cerchio; determinare la legge della forza, il centro di forza essendo sulla circonferenza del circolo.

Risultato. La forza varia inversamente come il cubo della distanza.

16. Una sfera levigata poggia sopra un filo senza peso legato alle sue estremità a due punti fissi; mostrare che se l'arco di contatto del filo e della sfera non è minore di $2 \tan^{-1} \frac{48}{55}$, la sfera si può dividere in due porzioni eguali per mezzo di un piano verticale senza disturbare l'equilibrio.

17. Mostrare che se una catena circonda esattamente un circolo verticale levigato, in modo da essere in contatto nel punto più basso senza premere, l'intera pressione sul circolo è il doppio del peso della catena, e la tensione nel punto più alto è tre volte quella nel più basso.

18. Due fili senza peso della stessa lunghezza hanno le loro estremità fisse in due punti nello stesso piano orizzontale. Una sfera levigata di raggio r e di peso W è sostenuta sopra di essi alla stessa distanza da ciascuno dei punti dati. Se il piano in cui giace ciascun filo fa un angolo α con l'orizzonte, dimostrare che la tensione di ciascuno è $\frac{Wa}{8r} \operatorname{cosec} \alpha$, a essendo la distanza fra i punti.

19. Una catena pesante uniforme pende sopra due caviglie le-

vigate ad una distanza $2a$ tra loro nello stesso piano orizzontale. Quando vi è equilibrio, $2s$ è la lunghezza della catena tra le caviglie, la quale pende in forma di una catenaria, c è la lunghezza di una porzione della catena il di cui peso è uguale alla tensione nel punto più basso, ed h è la lunghezza dell'estremo che pende verticalmente. Se δs e δh sono i piccoli incrementi di s ed h corrispondenti ad una piccola uniforme espansione della catena, mostrare che

$$\delta s : \delta h = s \cdot c - h \cdot a : h \cdot c - s \cdot a.$$

20. AB, AC sono due verghe eguali ed uniformi mobili intorno ad un ganghero fisso in A, CB è una catena uniforme, eguale in lunghezza ad AB o AC ed $\left(\frac{1}{n}\right)^{\text{mo}}$ del loro peso, che congiunge gli estremi B e C; mostrare che nella posizione di equilibrio, l'angolo θ che ciascuna verga fa con l'orizzonte è dato approssimativamente dall'equazione

$$\cos\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+1)^2}.$$

n essendo grande in paragone dell'unità.

21. Un filo uniforme circoscrive esattamente un dato circolo levigato, ed è attratto da una forza che varia come la distanza da un punto nell'interno del circolo. Trovare la tensione in ogni punto, supponendo che essa svanisca nel punto più vicino al centro di forza, e mostrare che la forza alla massima distanza

$$= \frac{\text{intera pressione sul circolo}}{\text{massa del filo}}.$$

CAPITOLO X.

Attrazioni.

158. Risulta da considerazioni che si sviluppano nelle opere sull'Astronomia fisica, che due particelle di materia situate ad ogni distanza sensibile l'una dall'altra si attraggono scambievolmente con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse, ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

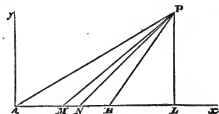
Supponiamo quindi che un elemento sia attratto da tutti gli elementi di un corpo; se risolviamo l'attrazione di ciascun elemento del corpo nelle componenti parallele a due assi rettangolari fissi, e prendiamo la somma delle componenti che agiscono in una data direzione, otteniamo l'attrazione dell'intero corpo sull'elemento risoluta in quella direzione, e possiamo così conoscere l'attrazione risultante del corpo in grandezza e direzione. Daremo alcuni esempii particolari, e poi passeremo alle formole generali.

159. *Trovare l'attrazione di una linea retta uniforme sopra un punto esterno.*

Per linea retta intendiamo un cilindro tale che la sezione perpendicolare al suo asse è una linea curva, ogni corda della quale è infinitamente piccola.

Sia AB la linea, P l'elemento attratto; si prenda A per origine, ed AB per direzione dell'asse delle x. Si tiri PL perpendicolare ad Ax; sia $AB=l$, $AL=a$, $PL=b$. Siano M ed N punti adiacenti nella linea, $AM=x$, $MN=\delta x$. Se ρ è la densità della linea, e κ l'area di una sezione perpendicolare alla sua lunghezza, la massa dell'elemento è $\rho\kappa\,\delta x$.

Sia m la massa di P; allora l'attrazione dell'elemento MN sopra P è (Art. 158)

$$\frac{\mu m\,\rho\kappa\,\delta x}{(PM)^2},$$

in cui μ è una quantità costante. Quindi, la parte risoluta dell' attrazione sull' elemento parallela all' asse delle x, è

$$\frac{\mu m\,\rho\varkappa\,\delta x}{PM^2}\cdot\frac{ML}{PM} \quad \text{o} \quad \frac{\mu m\,\rho\varkappa\,(a-x)\,\delta x}{\{b^2+(a-x)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Inoltre la parte risoluta dell' attrazione dell' elemento parallela all' asse delle y, è

$$\frac{\mu m\,\rho\varkappa\,\delta x}{PM^2}\cdot\frac{PL}{PM} \quad \text{o} \quad \frac{\mu m\,\rho\varkappa\,b\delta x}{\{b^2+(a-x)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Siano X ed Y le parti risolute dell' attrazione della linea, parallele agli assi delle x e delle y rispettivamente; allora

$$X=\mu m\,\rho\varkappa\int_0^l\frac{(a-x)\,dx}{\{b^2+(a-x)^2\}^{\frac{3}{2}}},\ \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$Y=\mu m\,\rho\varkappa\int_0^l\frac{bdx}{\{b^2+(a-x)^2\}^{\frac{3}{2}}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quindi, ponendo f per $\mu\rho\varkappa$, troveremo

$$X=fm\left\{\frac{1}{PB}-\frac{1}{PA}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$Y=\frac{fm}{PL}\left\{\frac{AL}{PA}-\frac{BL}{PB}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Sia $APL=\alpha$, $BPL=\beta$, $APB=\gamma$; allora

$$X=\frac{fm}{PL}(\cos\beta-\cos\alpha),$$

$$Y=\frac{fm}{PL}(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta);$$

quindi $\sqrt{(X^2+Y^2)}=\dfrac{fm}{PL}\sqrt{\{(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2\}}$

$$=\frac{fm}{PL}\sqrt{(2-2\cos\gamma)}=\frac{2fm}{PL}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma\ \ldots\ldots (5).$$

Questo dà la grandezza dell' attrazione risultante. Inoltre

$$\frac{X}{Y}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Questo mostra che la direzione dell' attrazione risultante bisega l' angolo APB.

Se L cade *tra* A e B, si vedrà da (1) e (2) che l'espressione di X in (3) rimane invariata, ma quella di Y in (4) si cambia in

$$\frac{fm}{PL}\left\{\frac{AL}{PA}+\frac{BL}{PB}\right\}.$$

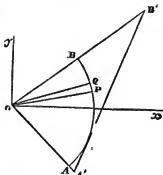
Questo non altererà il risultato in (5), e la direzione della risultante biseghera sempre l'angolo APB.

Apparisce dalla investigazione che X è l'attrazione risoluta parallela all'asse delle x diretta *verso* l'asse delle y, ed Y è l'attrazione risoluta parallela all'asse delle y e *verso* l'asse delle x.

160. Nella ricerca precedente abbiamo preso m per dinotare la massa dell'elemento attratto; in seguito supporremo sempre che la massa dell'elemento attratto sia dinotata dall'unità. Per formarci un'idea precisa della quantità μ, possiamo supporre due elementi ciascuno che abbia la sua massa eguale all'unità di massa, allora μ sarà l'intera forza che uno di essi esercita sull'altro quando la distanza tra loro è l'unità di lunghezza. Siccome, però, scegliendo convenientemente l'unità di massa possiamo fare $\mu=1$, in seguito non considereremo necessario d'introdurre μ.

161. *Trovare l'attrazione di un arco circolare sopra di un elemento situato nel centro del circolo.*

Sia AB un arco circolare qualunque; per O centro del circolo si tiri la bisettrice dell'angolo AOB, e si prenda questa linea per asse delle x. Sia $POx=\theta$, $QOP=\delta\theta$, $AOB=2\alpha$, $OB=r$. L'attrazione dell'elemento PO risoluta parallelamente agli assi delle x e delle y rispettivamente è, se ρ e $\varkappa$ hanno lo stesso significato come nell'Art. 159,

$$\frac{\varkappa\rho r\delta\theta}{r^2}\cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{\varkappa\rho r\delta\theta}{r^2}\operatorname{sen}\theta;$$

quindi
$$X=\frac{\varkappa\rho}{r}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta\,d\theta=\frac{2\varkappa\rho}{r}\operatorname{sen}\alpha,$$

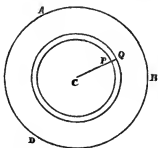
$$Y=\frac{\varkappa\rho}{r}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=0.$$

Paragonando questi risultati con quelli nell'Art. 159, apparisce che l'attrazione di un arco circolare sopra un elemento nel centro è la stessa in grandezza e direzione di quella di una linea retta qualunque $A'B'$ che *tocca* l'arco AB ed è terminata dalle linee OA ed OB prolungate, l'arco e la linea essendo supposto di avere la stessa densità, ed eguali le aree delle loro sezioni trasversali.

Se OP ed OQ si prolungano sino ad incontrare la linea $A'B'$ nei punti P' e Q' rispettivamente, si può mostrare che l'attrazione dell'elemento $P'Q'$ sopra un elemento in O è eguale a quella di PQ, ed in questo modo potremmo dimostrare ciò che or ora si è fatto vedere, che le attrazioni di AB e di $A'B'$ sopra un elemento in O sono eguali e coincidenti.

Ne segue facilmente, che se un elemento è attratto dai tre lati di un triangolo, esso sarà in equilibrio se è posto nel centro del circolo inscritto nel triangolo.

162. *Trovare l'attrazione di una lamina circolare uniforme sopra un elemento situato nella linea retta condotta pel centro della lamina ad angoli retti sul suo piano.*

Supponiamo C il centro del circolo DAB, il piano della figura coincidendo con una faccia della lamina, e l'elemento attratto essendo nella linea retta condotta per C perpendicolarmente alla lamina e ad una distanza c da C. Si descrivano col centro C due circoli concentrici adiacenti, l'uno col raggio $CP=r$, e l'altro col raggio $CQ=r+\delta r$. Dinoti κ la spessezza della lamina, che si suppone essere una quantità infinitamente piccola, allora la massa dell'anello circolare contenuto fra i circoli adiacenti è $2\pi\rho\kappa r\delta r$. Ogni elemento in questo anello circolare è ad una distanza $\sqrt{(c^2+r^2)}$ dall'elemento attratto; inoltre l'attrazione risultante dell'anello è nella linea retta condotta per C ad angoli retti sulla lamina, ed è eguale a

$$\frac{2\pi\rho\kappa r\delta r}{c^2+r^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{(c^2+r^2)}},$$

il fattore $\frac{c}{\sqrt{(c^2+r^2)}}$ essendo il moltiplicatore necessario per risol-

vere l'attrazione di ogni elemento dell'anello secondo la normale alla lamina in C.

Quindi, l'attrazione risultante dell'intera lamina è

$$2\pi\rho\kappa c\int_0^b \frac{rdr}{(c^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

in cui b è il raggio del contorno della lamina.

Ora $$\int_0^b \frac{rdr}{(c^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{(c^2+b^2)}};$$

quindi l'attrazione risultante

$$= 2\pi\rho\kappa c\left\{\frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{(c^2+b^2)}}\right\}.$$

Se supponiamo che b diventi infinita, otteniamo per l'attrazione di una lamina infinita sopra un elemento esterno, l'espressione $2\pi\rho\kappa$, che è indipendente dalla distanza dell'elemento attratto dalla lamina.

Dall'ultimo risultato possiamo dedurre l'attrazione risultante di una piastra uniforme di spessezza finita, ma di estensione infinita, sopra un elemento esterno. Infatti, supponiamo che la piastra sia divisa in un numero infinitamente grande di lamine, ciascuna della spessezza κ; allora l'attrazione di ciascuna lamina agisce nella linea retta condotta per l'elemento attratto perpendicolarmente alle superficie della piastra, ed è eguale a $2\pi\rho\kappa$. Quindi, l'attrazione risultante si troverà addizionando le attrazioni delle lamine, e sarà $2\pi\rho h$, se h è la spessezza della piastra.

Se un elemento è situato *sulla* superficie esterna di una piastra infinita, il risultato ora ottenuto esprimerà l'attrazione della piastra sull'elemento. Se esso è situato nell'interno della piastra ad una distanza h da una delle sue facce piane ed h' dall'altra, l'attrazione risultante sarà $2\pi\rho(h'-h)$ *verso* l'ultimo piano.

163. Per mezzo dell'Articolo precedente possiamo trovare l'attrazione risultante di un cilindro uniforme su di un elemento situato nel suo asse. Supponiamo diviso il cilindro in un numero infinitamente grande di lamine per mezzo di piani perpendicolari al suo asse; sia x la distanza di una lamina dall'elemento attratto, δx la spessezza della lamina, b il raggio del cilindro; allora l'attrazione della lamina è

$$2\pi\rho\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+b^2)}}\right\}\delta x.$$

Si supponga l'elemento attratto *al di fuori* del cilindro ad una distanza c da esso; sia h l'altezza del cilindro; allora l'attrazione risultante del cilindro

$$= 2\pi\rho \int_c^{c+h} \left\{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+b^2)}}\right\} dx$$
$$= 2\pi\rho \left[h - \sqrt{\{(c+h)^2 + b^2\}} + \sqrt{(c^2+b^2)}\right].$$

Se supponiamo $c=0$ sicchè l'elemento sia sulla superficie del cilindro l'attrazione risultante è

$$2\pi\rho \left\{ h - \sqrt{(h^2+b^2)} + b \right\}.$$

164. Per trovare l'attrazione di un *cono* uniforme sopra un elemento nel suo vertice, incominciamo con l'espressione

$$2\pi\rho \left\{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+b^2)}}\right\} \delta x,$$

per l'attrazione di una lamina del cono. Inoltre, se α è il semiangolo al vertice del cono, abbiamo

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+b^2)}} = \cos\alpha;$$

quindi, l'attrazione risultante

$$= 2\pi\rho\,(1-\cos\alpha)\int_0^h dx = 2\pi\rho\,(1-\cos\alpha)\,h;$$

in cui h è l'altezza del cono.

Si vede facilmente che la stessa espressione vale per l'attrazione del tronco di cono su di un elemento situato nel vertice del cono completo, h rappresentando in questo caso l'altezza del tronco.

Se il cono è un cono *obliquo* con la base una figura piana qualunque è sempre vero che l'attrazione di un tronco sopra un elemento al vertice varia come la spessezza del tronco. Si considerino due lamine parallele infinitamente sottili a differenti distanze dal vertice di un tal cono, allora le attrazioni di queste lamine sull'elemento al vertice saranno le stesse. Infatti si prenda un elemento infinitamente piccolo dell'area sulla superficie di una delle lamine, e si formi una superficie conica con linee rette che passano pel perimetro di quest'area e per l'elemento attratto; questa superficie conica intercetterà elementi nelle due lamine che sono limitati da figure piane simili. Ora, supponendo le lamine della stessa spessezza, le masse degli elementi varieranno come i quadrati delle loro distanze dall'elemento attratto,

e così essi eserciteranno *attrazioni eguali* su questo elemento. Lo stesso risultato vale per ogni coppia corrispondente di elementi nelle due lamine, e così le due lamine eserciteranno sull'elemento al vertice attrazioni che sono eguali in intensità e coincidenti in direzione. Segue da ciò che l'attrazione di un tronco varia come la sua spessezza.

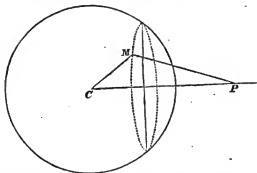
165. Finora abbiamo considerato il corpo attraente di uniforme densità, ma si può introdurre nelle questioni considerevole varietà con le diverse supposizioni intorno alla legge della densità. Supponiamo, per esempio, che nel caso della lamina circolare nell'Art. 162 la densità in ogni punto della lamina sia $\varphi(r)$, in cui r è la distanza di quel punto dal centro; $\varphi(r)$ si deve allora porre invece di ρ nell'Art. 162 e deve stare sotto al segno integrale. Perciò l'attrazione della lamina sarà

$$2\pi c\varkappa\int_0^b \frac{\varphi(r)\,r\,dr}{(c^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se $\varphi(r)=\frac{\sigma}{r}$, in cui σ è una costante, il risultato è

$$2\pi c\varkappa\sigma\int_0^b \frac{dr}{(c^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{o} \quad \frac{2\pi\varkappa\sigma b}{c\,(c^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

166. *Trovare l'attrazione risultante di un insieme di elementi che costituiscono uno strato sferico omogeneo di piccolissima spessezza sopra di un elemento al di fuori dello strato.*

Sia C il centro dello strato, M un elemento qualunque di esso, P l'elemento attratto. Sia $CM=r$, $PM=y$, $CP=c$, θ=all'angolo

PCM, φ=all'angolo che il piano PCM fa col piano della figura: δr=alla spessezza dello strato, e dinoti ρ la densità dello strato.

Il volume del solido elementare in M è $r^2 \operatorname{sen}\theta \delta r \delta\theta \delta\varphi$ (si vegga l'Art. 129). L'attrazione dell'intero strato agisce secondo PC; l'attrazione dell'elemento in M risoluta secondo PC è

$$\frac{\rho r^2 \operatorname{sen}\theta \, \delta r \, \delta\theta \, \delta\varphi}{y^2} \, \frac{c - r\cos\theta}{y}.$$

Elimineremo θ da questa espressione per mezzo dell'equazione

$$y^2 = c^2 + r^2 - 2rc\cos\theta;$$

onde

$$\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dy} = \frac{y}{cr},$$

$$c - r\cos\theta = \frac{y^2 + c^2 - r^2}{2c}.$$

Quindi l'attrazione di M su P secondo PC

$$= \frac{\rho r \delta r}{2c^2}\left(1 + \frac{c^2 - r^2}{y^2}\right)\delta y \, \delta\varphi.$$

Quindi l'attrazione risultante dell'intero strato

$$= \frac{\rho r \delta r}{2c^2}\int_{c-r}^{c+r}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{c^2 - r^2}{y^2}\right) dy \, d\varphi = \frac{\pi\rho r \delta r}{c^2}\int_{c-r}^{c+r}\left(1 + \frac{c^2 - r^2}{y^2}\right) dy$$

$$= \frac{\pi\rho r \delta r}{c^2}(2r + 2r) = \frac{4\pi\rho r^2 \delta r}{c^2} = \frac{\text{massa dello strato}}{c^2}.$$

Questo risultato mostra che lo strato attrae l'elemento in P nello stesso modo come se la massa dello strato fosse condensata nel suo centro.

167. Segue dall'Articolo precedente, che una sfera la quale è o omogenea o pure costituita di strati sferici concentrici di uniforme densità, attrae l'elemento in P nello stesso modo come se l'intera massa fosse riunita nel suo centro.

168. *Trovare l'attrazione di uno strato sferico omogeneo di piccola spessezza sopra un elemento situato nel suo interno.*

Dobbiamo procedere come nell'Art. 166; ma i limiti di y sono in questo caso $r - c$ ed $r + c$; quindi l'attrazione risultante dello strato

$$= \frac{\pi\rho r \delta r}{c^2}\int_{r-c}^{r+c}\left(1 - \frac{r^2 - c^2}{y^2}\right) dy = \frac{\pi\rho r \delta r}{c^2}(2c - 2c) = 0.$$

Quindi un elemento nell'interno dello strato è attratto ugualmente in ogni direzione.

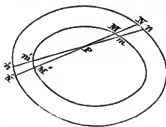
Supponiamo un elemento dentro di una sfera omogenea alla distanza r dal suo centro; allora per quello che si è or ora dimostrato tutta quella porzione della sfera che è ad una distanza dal centro maggiore di quella dell'elemento non produce alcun effetto sull'elemento. Inoltre per l'Art. 166, il rimanente della sfera attrae l'elemento nello stesso modo come se la massa del rimanente fosse riunita nel centro della sfera. Così se ρ è la densità della sfera l'attrazione sull'elemento è

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3}{r^2}, \quad \text{cioè} \quad \frac{4\pi\rho r}{3}.$$

Così *nell'interno di una sfera omogenea l'attrazione varia come la distanza dal centro.*

169. Le proposizioni intorno all'attrazione di uno strato sferico uniforme sopra un elemento esterno o interno furono date da Newton (*Principia*, Lib. 1. Prop. 70, 71). Il risultato rispetto all'elemento *interno* fu esteso da Newton al caso di uno strato limitato da superficie sferoidiche simili e similmente poste (*Principia,* Lib. I. Prop. 91, Cor. 3). La proposizione è anche vera quando lo strato è limitato da superficie di *ellissoidi* simili e similmente posti, il che passiamo a dimostrare col metodo dato da Newton per le superficie sferoidiche.

170. *Se uno strato di uniforme densità è limitato da due superficie ellissoidali concentriche, simili e similmente poste, l'attrazione risultante sopra un elemento interno svanisce.*

Sia l'elemento attratto P il vertice di una serie infinita di coni

retti. Siano $NMPM'N'$ ed $nmPm'n'$ due linee generatrici di uno di questi coni, e supponiamo che le curve nella figura rappre-

sentino l'intersezioni delle superficie dello strato col piano che contiene queste linee generatrici. Le curve saranno ellissi simili e similmente poste, e per una proprietà di tali ellissi,

$$MN = M'N' \quad \text{ed} \quad mn = m'n'.$$

Prendendo l'angolo del cono abbastanza piccolo, ciascuna delle due porzioni dello strato che esso intercetta sarà ultimamente un *tronco di cono*, ed avendo eguali altezze e l'angolo verticale comune, esse *eserciteranno eguali attrazioni su di* P. (Si vegga l'Art. 164). Simili considerazioni valgono per rispetto a ciascuno della infinita serie di coni di cui P è il vertice, e per conseguenza l'attrazione risultante dello strato svanisce.

Questo risultato essendo vero, qualunque sia la spessezza dello strato, è vero quando lo strato diviene infinitamente sottile.

171. In modo presso a poco simile possiamo stabilire la proposizione seguente dovuta a Poisson; *l'attrazione risultante di uno strato infinitamente sottile limitato da due superficie ellissoidali concentriche, simili, e similmente poste sopra un elemento esterno è nella direzione dell'asse del cono inviluppante che ha il suo vertice nel dato elemento*. (*Crelle*, *Journal*, Vol. XII. p. 141).

Si dinoti l'elemento esterno con Q; e supponiamo che P nella figura precedente sia il punto dove l'asse del cono inviluppante incontra il piano di contatto del cono e dello strato ellissoidale. Si tirino delle linee rette $NMM'N'$ ed $nmm'n'$ come nella figura precedente. Dinoti μ la massa dell'elemento Mn è μ' la massa dell'elemento $M'n'$.

L'attrazione di μ è eguale a $\dfrac{\mu}{QM^2}$ ed agisce secondo QM;

l'attrazione di μ' è eguale a $\dfrac{\mu'}{QM'^2}$ ed agisce secondo QM'.

Ora $$\frac{\mu}{PM^2} = \frac{\mu'}{PM'^2};$$

e si sa, per la teoria delle Coniche, che QM e QM' fanno *angoli eguali* con QP; quindi

$$\frac{PM}{QM} = \frac{PM'}{QM'};$$

e quindi $$\frac{\mu}{QM^2} = \frac{\mu'}{QM'^2}.$$

Così gli elementi μ e μ' esercitano *eguali attrazioni* su di Q; e poichè le direzioni di queste attrazioni fanno angoli eguali con

QP, l'attrazione *risultante* di questi due elementi agisce secondo QP. Un simile risultato vale per ogni coppia di elementi in cui lo strato ellissoidale si può decomporre; e così ne segue la proposizione. Apparisce dal corso della dimostrazione che ogni piano per P divide lo strato in due parti che esercitano eguali attrazioni su di Q.

Segue da questo risultato, passando al limite, che l'attrazione risultante dello strato infinitamente sottile sopra un elemento a contatto con la superficie esterna è nella direzione della normale alla superficie nel punto di contatto.

Daremo ora nei due Articoli seguenti alcune proposizioni che serviranno da esercizii; i risultati approssimati che otterremo possono essere in appresso verificati con una esatta investigazione. (Si vegga l'Art. 181).

172. *Trovare l'attrazione di uno sferoide schiacciato omogeneo di piccola eccentricità sopra un elemento nel suo polo.*

Sia $2c$ la lunghezza dell'asse minore e $2a$ quella dell'asse maggiore dell'ellisse generatrice. Lo sferoide si può supporre formato da una sfera concentrica, di raggio c, e di uno strato esteriore; calcoleremo le attrazioni di queste parti separatamente.

Si faccia una sezione della sfera e dello sferoide con un piano perpendicolare all'asse di rotazione dello sferoide ad una distanza x dall'elemento attratto. Questo piano intersega la sfera e lo sferoide secondo cerchi concentrici, l'area del primo essendo πy^2 e quella del secondo $\frac{\pi a^2 y^2}{c^2}$, in cui $y^2 = 2cx - x^2$; la differenza di queste aree è $\pi\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)y^2$. Se si fa una sezione con un secondo piano, parallelo al primo e ad una distanza δx da esso, il volume della porzione dello *strato* intercetta tra i piani sarà $\pi\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)y^2\delta x$. La distanza di ogni elemento dell'anello così formato dall'elemento attratto è approssimativamente $\sqrt{(2cx)}$, e, siccome l'attrazione risultante dell'anello agirà secondo l'asse dello sferoide, essa sarà, approssimativamente,

$$= \pi\rho\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)\frac{x}{\sqrt{(2cx)}}\,\frac{y^2\delta x}{2cx}$$

$$= \pi\rho\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)\frac{2cx^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{(2c)^{\frac{3}{2}}}\,\delta x.$$

Quindi l'attrazione risultante dello strato

$$=\frac{\pi\rho\,(a^2-c^2)}{2^{\frac{3}{2}}\,c^{\frac{7}{2}}}\int_0^{2c}(2\,cx^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})\,dx=\frac{8\pi\rho\,(a^2-c^2)}{15c}.$$

Se supponiamo $c=a\,(1-\varepsilon)$, ε essendo molto piccolo, abbiamo

$$a^2-c^2=2c^2\varepsilon \text{ approssimativamente;}$$

quindi l'attrazione risultante dello strato

$$=\frac{16\pi\rho\varepsilon c}{15}.$$

Inoltre l'attrazione della sfera sull'elemento, per l'Art. 167,

$$=\frac{4}{3}\,\pi\rho c;$$

quindi l'attrazione dello sferoide sull'elemento

$$=\frac{4}{3}\,\pi\rho\left(1+\frac{4}{5}\,\varepsilon\right)c.$$

173. *Trovare l'attrazione di uno sferoide schiacciato omogenco di piccola eccentricità sopra un elemento al suo equatore.*

Sia $2c$ la lunghezza dell'asse minore, e $2a$ quella dell'asse maggiore dell'ellisse generatrice. Lo sferoide si può supporre essere la differenza tra una sfera concentrica di raggio a ed uno strato, e le attrazioni della sfera e dello strato si possono calcolare separatamente. Si faccia una sezione della sfera e dello sferoide con un piano perpendicolare alla linea retta che congiunge l'elemento attratto col centro comune della sfera e dello sferoide, e ad una distanza x dall'elemento attratto; questo piano segherà la sfera secondo un circolo l'area del quale è πy^2, dove $y^2=2ax-x^2$, e segherà lo sferoide secondo un'ellisse di cui i semiassi sono rispettivamente y e $\frac{cy}{a}$, e l'area della quale è perciò $\frac{\pi c}{a}y^2$. La differenza delle due aree è $\pi\left(1-\frac{c}{a}\right)y^2$. Se si fa una sezione con un secondo piano parallelo al primo, e ad una distanza δx da esso, il volume della porzione dello strato intercetta tra i piani sarà $\pi\left(1-\frac{c}{a}\right)y^2\,\delta x$. La distanza di ogni elemento dell'a-

nello così formato dall'elemento attratto è approssimativamente $\sqrt{(2ax)}$; e siccome l'attrazione risultante dell'anello agirà secondo la linea retta che unisce l'elemento attratto col centro, essa sarà approssimativamente

$$=\pi\rho\left(1-\frac{c}{a}\right)\frac{x}{\sqrt{(2ax)}}\frac{y^2\delta x}{2ax}$$

$$=\pi\rho\left(1-\frac{c}{a}\right)\frac{2ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{(2a)^{\frac{3}{2}}}\delta x.$$

Quindi l'attrazione risultante dello strato

$$=\frac{\pi\rho\,(a-c)}{2^{\frac{3}{2}}a^{\frac{5}{2}}}\int_0^{2a}(2ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})\,dx=\frac{8\pi\rho\,(a-c)}{15}$$

$$=\frac{8\pi\rho a\varepsilon}{15},\quad \text{se}\quad c=a\,(1-\varepsilon).$$

Inoltre l'attrazione della sfera, per l'Art. 167,

$$=\frac{4}{3}\pi\rho a;$$

quindi l'attrazione dello sferoide sull'elemento

$$=\frac{4}{3}\pi\rho a-\frac{8\pi\rho a\varepsilon}{15}=\frac{4}{3}\pi\rho\left(1-\frac{2}{5}\varepsilon\right)a.$$

$$=\frac{4}{3}\pi\rho\left(1+\frac{3}{5}\varepsilon\right)c.$$

Nello stesso modo si potrebbe mostrare che le attrazioni di uno sferoide *allungato* omogeneo di piccola eccentricità sopra elementi al polo ed all'equatore sono rispettivamente

$$\frac{4}{3}\pi\rho\left(1-\frac{4}{5}\varepsilon\right)c\quad\text{e}\quad\frac{4}{3}\pi\rho\left(1-\frac{3}{5}\varepsilon\right)c,$$

$2c$ essendo l'asse di rotazione dello sferoide, ed

$$a=c\,(1-\varepsilon).$$

174. Diamo un altro esempio. Alle volte è utile di paragonare l'attrazione esercitata dalla Terra sopra un elemento alla cima

di una montagna con l'attrazione esercitata dalla Terra sullo stesso elemento all'ordinario livello della superficie terrestre. L'investigazione è data da Poisson, (*Mécanique*, Tom. I. p. 492-496). Dinoti r il raggio della Terra, x l'altezza della montagna, g l'attrazione della Terra sopra un elemento di un'unità di massa all'ordinario livello della superficie terrestre. Se non vi fosse montagna l'attrazione della Terra sull'elemento ad una distanza x dalla sua superficie sarebbe $g\frac{r^2}{(r+x)^2}$: dobbiamo quindi aggiungere a questa espressione l'attrazione esercitata dalla montagna stessa. Supponiamo che la montagna sia di uniforme densità ρ, consideriamola di forma cilindrica, e l'elemento stia al centro della sua superficie superiore; allora per l'Art. 163 l'attrazione risultante è

$$2\pi\rho\left\{x-\sqrt{(x^2+b^2)}+b\right\},$$

in cui b è il raggio del cilindro. Se b è così grande in paragone di x che il quadrato di $\frac{x}{b}$ si possa trascurare, questa espressione si riduce a $2\pi\rho x$. Così se g' dinota l'attrazione alla cima della montagna

$$g'=\frac{gr^2}{(r+x)^2}+2\pi\rho x.$$

Dinoti σ la densità *media* della Terra, sicchè la massa della Terra sia $\frac{4\pi\sigma r^3}{3}$; allora

$$g=\frac{4\pi\sigma r^3}{3r^2}=\frac{4\pi\sigma r}{3};$$

così

$$g'=g\left\{\frac{r^2}{(r+x)^2}+\frac{3\rho x}{2\sigma r}\right\}.$$

Ora la densità media della Terra si conosce che è circa cinque volte e mezzo quella dell'acqua, e da quello che si può congetturare della densità della materia alla superficie terrestre, possiamo supporre $\frac{\rho}{\sigma}=\frac{1}{2}$. Ed

$$\frac{r^2}{(r+x)^2}=\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-2}=1-\frac{2x}{r}\text{ approssimativamente;}$$

così

$$g'=g\left(1-\frac{2x}{r}+\frac{3x}{4r}\right)=g\left(1-\frac{5x}{4r}\right).$$

Sino a qual punto le approssimazioni fatte in questo Articolo siano permesse sarebbe difficile di valutare; dall'Art. 162, apparisce che nel prendere $2\pi\rho x$ per rappresentare l'attrazione della montagna, noi in fatti facciamo consistere la montagna di una piastra uniforme di spessezza finita x, ma di estensione infinita.

Per le ricerche relative alle attrazioni delle montagne lo studente può consultare il trattato di Pratt sull'*Attractions... and the figure of the Earth.*

Finora ci siamo limitati a semplici esempii della legge ordinaria di attrazione; passiamo ora a considerare alcune altre leggi di attrazione, ed anche alcuni casi più complicati della legge ordinaria.

175. *Se gli elementi di un corpo attraggono con una forza che varia come il prodotto della massa per la distanza, l'attrazione risultante del corpo è la stessa come se l'intera massa del corpo fosse concentrata nel suo centro di gravità.*

Si prenda il centro di gravità del corpo attraente per origine delle coordinate, e siano a, b, c le coordinate dell'elemento attratto. Si divida il corpo attraente in elementi infinitamente piccoli; siano x, y, z le coordinate di un elemento, m la sua massa, ed r la sua distanza dall'elemento attratto. Allora l'attrazione di questo elemento è mr, e risolvendola parallelamente agli assi coordinati, otteniamo

$$mr\cdot\frac{a-x}{r}, \qquad mr\cdot\frac{b-y}{r}, \qquad mr\cdot\frac{c-z}{r},$$

rispettivamente. Quindi, se X, Y, Z dinotano le parti risolute dell'intera attrazione, abbiamo

$$X=\Sigma m\,(a-x), \quad Y=\Sigma m\,(b-y), \quad Z=\Sigma m\,(c-z).$$

Ma, poichè l'origine è il centro di gravità del corpo attraente, abbiamo

$$\Sigma mx=0, \quad \Sigma my=0, \quad \Sigma mz=0;$$

quindi $$X=a\Sigma m, \quad Y=b\Sigma m, \quad Z=c\Sigma m.$$

Ma queste espressioni sono le attrazioni risolute di una massa Σm situata all'origine, il che stabilisce la proposizione.

176. *Trovare l'attrazione di uno strato sferico omogeneo sopra un elemento fuori di esso; la legge di attrazione essendo rappresentata da* $\varphi(y)$, *in cui* y *è la distanza.*

Se procediamo come nell'Art. 166, troviamo l'attrazione risultante dello strato sopra P secondo PC

$$= \frac{\pi\rho r\,\delta r}{c^2}\int_{c-r}^{c+r}(y^2+c^2-r^2)\,\varphi(y)\,dy.$$

Si supponga $$\int \varphi(y)\,dy = \varphi_1(y),$$

ed $$\int y\,\varphi_1(y)\,dy = \psi(y).$$

Allora, integrando per parti, abbiamo

$$\int(y^2+c^2-r^2)\,\varphi(y)\,dy = (y^2+c^2-r^2)\,\varphi_1(y) - 2\int y\,\varphi_1(y)\,dy$$
$$= (y^2+c^2-r^2)\,\varphi_1(y) - 2\psi(y);$$

quindi $$\frac{\pi\rho r\,\delta r}{c^2}\int_{c-r}^{c+r}(y^2+c^2-r^2)\,\varphi(y)\,dy$$

$$= 2\pi\rho r\,\delta r\left\{\frac{c+r}{c}\varphi_1(c+r) - \frac{c-r}{c}\varphi_1(c-r) - \frac{1}{c^2}\psi(c+r) + \frac{1}{c^2}\psi(c-r)\right\}$$

$$= 2\pi\rho r\,\delta r\,\frac{d}{dc}\left\{\frac{\psi(c+r)-\psi(c-r)}{c}\right\}.$$

Quest'ultima formola si è introdotta semplicemente come un artificio analitico per semplificare l'espressione.

177. *Trovare l'attrazione dello strato sopra un elemento interno.*

Il calcolo è lo stesso come nell'ultimo Articolo, eccetto che i limiti di y sono $r-c$ ed $r+c$. Quindi, l'attrazione dello strato

$$= 2\pi\rho r\,\delta r\left\{\frac{r+c}{c}\varphi_1(r+c) + \frac{r-c}{c}\varphi_1(r-c) - \frac{1}{c^2}\psi(r+c) + \frac{1}{c^2}\psi(r-c)\right\}$$

$$= 2\pi\rho r\,\delta r\,\frac{d}{dc}\left\{\frac{\psi(r+c)-\psi(r-c)}{c}\right\}.$$

178. Le formole dei due Articoli precedenti daranno l'attrazione quando la legge di attrazione è conosciuta.

Es. 1. Sia $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$; onde $\varphi_1(r) = -\frac{1}{r} + A$,

$$\psi(r) = -r + \frac{1}{2}Ar^2 + B;$$

A e B essendo costanti.

Quindi l'attrazione sopra un elemento esterno

$$= 2\pi\rho r\delta r \frac{d}{dc}\left\{\frac{-4r + A(c+r)^2 - A(c-r)^2}{2c}\right\}$$

$$= 2\pi\rho r\delta r \frac{d}{dc}\left(-\frac{2r}{c} + 2Ar\right) = \frac{4\pi\rho r^2\delta r}{c^2}, \text{ (Art. 166).}$$

L'attrazione sopra un elemento interno

$$= 2\pi\rho r\delta r \frac{d}{dc}\left\{\frac{-4c + A(r+c)^2 - A(r-c)^2}{2c}\right\}$$

$$= 2\pi\rho r\delta r \frac{d}{dc}\left\{-2 + 2Ar\right\} = 0, \text{ (Art. 168).}$$

Es. 2. Sia $\varphi(r) = r$;

onde $\varphi_1(r) = \frac{1}{2}r^2 + A,\ \psi(r) = \frac{1}{8}r^4 + \frac{1}{2}Ar^2 + B.$

L'attrazione sopra un elemento esterno

$$= 2\pi\rho r\delta r \frac{d}{dc}\left\{\frac{(c+r)^4 - (c-r)^4 + 4A(c+r)^2 - 4A(c-r)^2}{8c}\right\}$$

$$= 2\pi\rho r\delta r \frac{d}{dc}\left\{c^2 r + r^3 + 2Ar\right\}$$

$$= 4\pi\rho r^2 c\delta r = \text{massa} \times c.$$

L'attrazione quindi è la stessa come se lo strato fosse riunito nel suo centro. Trovammo questa proprietà per la legge del quadrato inverso. Vedremo ora se vi sono altre leggi che danno la stessa proprietà.

179. *Trovare quali leggi di attrazione ci permettono di supporre uno strato sferico condensato nel suo centro quando attrae un elemento esterno.*

Sia $\varphi(r)$ la legge della forza; allora, se c è la distanza del centro dello strato dall'elemento attratto, r il raggio dello strato, e $\psi(r) = \int\left\{r\int\varphi(r)\,dr\right\}dr$, l'attrazione dello strato

$$= 2\pi\rho r\delta r \frac{d}{dc}\left\{\frac{\psi(c+r) - \psi(c-r)}{c}\right\}.$$

Ma se lo strato è condensato nel suo centro, l'attrazione

$$= 4\pi\rho\, r^2 \delta r\, \varphi(c);$$

quindi $$\frac{d}{dc}\left\{\frac{\psi(c+r)-\psi(c-r)}{c}\right\} = 2r\varphi(c).$$

Si sviluppino $\psi(c+r)$ e $\psi(c-r)$ secondo le potenze di r; allora usando $\psi'(c)$ per $\frac{d\psi(c)}{dc}$, etc. abbiamo

$$2r\varphi(c) = 2\frac{d}{dc}\left\{\frac{r}{c}\psi'(c) + \frac{r^3}{c\lfloor 3}\psi'''(c) + \ldots\right\}$$

$$= 2r\varphi(c) + 2\frac{d}{dc}\left\{\frac{r^3}{c\lfloor 3}\psi'''(c) + \ldots\right\};$$

onde $$\frac{d}{dc}\left\{\frac{r^3}{c\lfloor 3}\psi'''(c) + \ldots\right\} = 0,$$

qualunque sia r; quindi

$$\frac{d}{dc}\left\{\frac{\psi'''(c)}{c}\right\} = 0,\ \frac{d}{dc}\left\{\frac{\psi^{(v)}(c)}{c}\right\} = 0, \text{ etc.}$$

Ma $$\psi'(c) = c\int \varphi(c)\,dc;$$

quindi $$\psi''(c) = \int \varphi(c)\,dc + c\varphi(c);$$

quindi $$\psi'''(c) = 2\varphi(c) + c\varphi'(c).$$

Quindi, per la prima delle precedenti equazioni di condizione per $\psi(c)$,

$$\frac{2\varphi(c)}{c} + \varphi'(c) = \text{costante}.$$

Si ponga $3A$ per questa costante; si moltiplichino i due membri dell'equazione per c^2 e s'integri; così

$$c^2\varphi(c) = Ac^3 + B;$$

onde $$\varphi(c) = Ac + \frac{B}{c^2}.$$

Questo valore soddisfa a tutte le altre equazioni di condizione

per $\psi(c)$; quindi le leggi richieste di attrazione sono quelle della distanza diretta, del quadrato inverso, ed una legge composta da queste.

180. *Trovare per quali leggi lo strato attrae un elemento interno egualmente in ogni direzione.*

Quando questo è il caso,

$$\frac{d}{dc}\left\{\frac{\psi(r+c)-\psi(r-c)}{c}\right\}=0\ ;$$

onde
$$\psi'(r)+\frac{c^2}{\underline{|3}}\psi'''(r)+\ldots=A\,,$$

qualunque sia c, A essendo una costante indipendente da c; quindi

$$\psi'(r)=A,\ \ \psi'''(r)=0,\ \text{etc.}$$

Dalla seconda condizione, abbiamo

$$\psi(r)=B+B'r+B''r^2,$$

in cui B, B', e B'' sono costanti.

Quindi
$$\psi'(r)\ \text{o}\ r\int\varphi(r)\,dr=B'+2B''r\ ;$$

onde
$$\int\varphi(r)\,dr=\frac{B'}{r}+2B''\ ;$$

quindi
$$\varphi(r)=-\frac{B'}{r^2}:$$

con questo valore di $\varphi(r)$ tutte le altre equazioni di condizione sono soddisfatte; quindi la sola legge che soddisfa la condizione è quella del quadrato inverso.

181. *Trovare l'attrazione di uno sferoide schiacciato omogeneo sopra un elemento nell'interno della sua massa, la legge di attrazione essendo quella del quadrato inverso della distanza.*

Siano a e c i semiassi, a essendo maggiore di c; e sia l'equazione dello sferoide riferito al suo centro come origine

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Siano f, g, h le coordinate dell'elemento attratto; r la distanza dall'elemento attratto di un punto qualunque della massa at-

traente; θ l'angolo che r fa con una linea retta parallela all'asse delle z; φ l'angolo che il piano che contiene r ed una linea retta pel punto (f,g,h) parallela all'asse delle z fa col piano delle (x,z). Il volume di un elemento della massa attraente

$$= r^2 \operatorname{sen}\theta\, \delta\theta\, \delta\varphi\, \delta r,$$

come nell'Art. 129. Sia ρ la densità dello sferoide; allora l'attrazione di questo elemento sull'elemento attratto è $\rho \operatorname{sen}\theta\delta\theta\delta\varphi\delta r$; e le parti risolute di questa parallele agli assi delle x, y, z, sono

$$\rho \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi\, \delta\theta\, \delta\varphi\, \delta r, \quad \rho \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi\, \delta\theta\, \delta\varphi\, \delta r,$$

$$\text{e } \rho \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, \delta\theta\, \delta\varphi\, \delta r,$$

rispettivamente. Quindi le attrazioni dell'intero sferoide si troveranno integrando queste espressioni tra i limiti convenienti. Passiamo a trovare questi limiti.

Nell'equazione (1) si ponga

$$f + r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \text{ per } x,$$

$$g + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \text{ per } y,$$

$$h + r \cos\theta \qquad \text{per } z;$$

allora l'equazione dello sferoide diviene

$$\frac{(f + r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)^2 + (g + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)^2}{a^2} + \frac{(h + r\cos\theta)^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{o} \quad r^2 \left\{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right\} + 2r \left\{\frac{f \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + g \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{a^2} + \frac{h\cos\theta}{c^2}\right\}$$

$$= 1 - \frac{f^2 + g^2}{a^2} - \frac{h^2}{c^2}.$$

Si ponga

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} = K,$$

$$\frac{f \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + g \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{a^2} + \frac{h\cos\theta}{c^2} = F,$$

$$F^2 + K\left(1 - \frac{f^2 + g^2}{a^2} - \frac{h^2}{c^2}\right) = H;$$

allora

$$K^2 r^2 + 2KFr + F^2 = H \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

L'equazione (2) darà due valori per r, uno positivo e l'altro ne-

gativo; questi valori si possono dinotare con r_1 e $-r_2$, essendo

$$r_1 = \frac{-F + \sqrt{H}}{K}, \quad r_2 = \frac{F + \sqrt{H}}{K}.$$

Quindi per trovare l'intera attrazione dello sferoide parallela all'asse delle x, integriamo prima l'espressione

$$\rho \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \,\delta\theta\, \delta\varphi\, \delta r$$

rispetto ad r tra i limiti $r=0$ ed $r=r_1$, ed anche tra i limiti $r=0$ ed $r=r_2$, e prendiamo la differenza; otteniamo così

$$\rho \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi\, (r_2 - r_1)\, \delta\theta\, \delta\varphi\,;$$

questo deve essere integrato tra 0 e π per φ, e 0 e π per θ. Se A dinota l'intera attrazione parallela all'asse delle x, agente *verso* l'origine, abbiamo allora

$$A = 2\rho \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{F}{K} \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \, d\theta\, d\varphi.$$

Possiamo semplificare questa espressione omettendo quei termini che svaniscono per i principii del Calcolo integrale; così

$$A = 2f\rho\, c^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^3\theta \cos^2\varphi \, d\theta\, d\varphi}{c^2 \operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta}$$

$$= \pi f\rho\, c^2 \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^3\theta \, d\theta}{c^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta}$$

$$= \pi f\rho\, c^2 \int_0^\pi \frac{(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{c^2 + (a^2-c^2)\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\pi f\rho\, c^2}{a^2-c^2} \int_0^\pi \left\{ \frac{a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{c^2 + (a^2-c^2)\cos^2\theta} - \operatorname{sen}\theta \right\} d\theta$$

$$= \frac{2\pi f\rho\, c^2}{a^2-c^2} \left\{ \frac{a^2}{c\sqrt{(a^2-c^2)}} \tan^{-1}\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{c} - 1 \right\}.$$

Sia $c^2 = a^2(1-e^2)$; allora il risultato si può scrivere

$$A = 2\pi f\rho \left\{ \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3} \operatorname{sen}^{-1} e - \frac{1-e^2}{e^2} \right\}.$$

Nello stesso modo, se B dinota l'intera attrazione parallela all'asse delle y,

$$B = 2\pi g\rho \left\{ \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3} \operatorname{sen}^{-1} e - \frac{1-e^2}{e^2} \right\}.$$

Dinoti C l'intera attrazione parallela all'asse delle z, allora

$$C = 2\rho \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{F}{K} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2h\rho a^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta \cos^2\theta \, d\theta \, d\varphi}{c^2 \operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2\pi h\rho a^2}{a^2 - c^2} \int_0^\pi \left\{ \operatorname{sen}\theta - \frac{c^2 \operatorname{sen}\theta}{c^2 + (a^2 - c^2)\cos^2\theta} \right\} d\theta$$

$$= \frac{4\pi h\rho a^2}{a^2 - c^2} \left\{ 1 - \frac{c}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{c} \right\}$$

$$= 4\pi h\rho \left\{ \frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{e^3} \operatorname{sen}^{-1} e \right\}.$$

Se lo sferoide è *allungato* a è minore di c. Si può dimostrare allora che

$$A = \frac{2\pi f\rho c^2}{c^2 - a^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{c\sqrt{(c^2 - a^2)}} \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - a^2)}}{a} \right\},$$

$$B = \frac{2\pi g\rho c^2}{c^2 - a^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{c\sqrt{(c^2 - a^2)}} \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - a^2)}}{a} \right\},$$

$$C = \frac{4\pi h\rho a^2}{c^2 - a^2} \left\{ \frac{c}{\sqrt{(c^2 - a^2)}} \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - a^2)}}{a} - 1 \right\}.$$

Si può notare che in tutti e due i casi

$$\frac{A}{f} + \frac{B}{g} + \frac{C}{h} = 4\pi\rho.$$

182. Dalle espressioni nell'Articolo precedente vediamo che l'attrazione è indipendente dalla grandezza dello sferoide e dipende solamente dall'eccentricità.

Quindi l'attrazione dello sferoide simile al dato e che passa per l'elemento attratto, è la stessa di quella di ogni altro sferoide concentrico simile e similmente posto *che comprende l'elemento attratto nella sua massa*. Quindi uno strato sferoidale le superficie del quale sono simili, similmente poste, e concentriche, attrae un elemento nel suo interno egualmente in tutte le direzioni. Questo è stato già stabilito; si vegga l'Art. 170.

Se poniamo l'ellitticità dello sferoide $=\varepsilon$, e supponiamo ε molto piccolo sicchè si possa trascurare il suo quadrato, abbiamo per l'ellissoide *schiacciato*, poichè $c=a(1-\varepsilon)$,

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = 1 - (1-\varepsilon)^2 = 2\varepsilon \text{ approssimativamente.}$$

Dopo sviluppo e riduzione otterremo approssimativamente

$$A = \frac{4}{3}\pi\rho\left(1 - \frac{2}{5}\varepsilon\right)f,$$

$$B = \frac{4}{3}\pi\rho\left(1 - \frac{2}{5}\varepsilon\right)g,$$

$$C = \frac{4}{3}\pi\rho\left(1 + \frac{4}{5}\varepsilon\right)h;$$

Per lo sferoide *allungato*, poichè $a=c(1-\varepsilon)$,

$$e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2} = 1 - (1-\varepsilon)^2 = 2\varepsilon.$$

Dopo sviluppo e riduzione otterremo approssimativamente

$$A = \frac{4}{3}\pi\rho\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon\right)f,$$

$$B = \frac{4}{3}\pi\rho\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon\right)g,$$

$$C = \frac{4}{3}\pi\rho\left(1 - \frac{4}{5}\varepsilon\right)h.$$

183. Se invece dello sferoide prendiamo un ellissoide di cui i semiassi sono a, b, c, si può mostrare che

$$C = 4\pi h\rho ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta + c^2\operatorname{sen}^2\theta)}\sqrt{(b^2\cos^2\theta + c^2\operatorname{sen}^2\theta)}};$$

ed i valori di A e B si possono trovare con cambiamenti simmetrici nelle lettere a, b, c ed f, g, h.

Se mutiamo a,b,c in $a(1+n)$, $b(1+n)$, $c(1+n)$ rispettivamente, l'espressione di C *rimane invariata*; e così ancora le espressioni per A e B rimangono invariate. Ciò mostra che uno strato di qualunque spessezza, terminato internamente ed esternamente da ellissoidi concentrici simili e similmente posti, non esercita alcuna attrazione sopra un elemento nel suo interno. Questo è stato già stabilito; si vegga l'Art. 170.

184. Supponiamo che si voglia l'attrazione di uno sferoide sopra un elemento *esterno*.

Nell'equazione (2) dell'Art. 181, avremo ora $F^2 - H$ una quantità *positiva*, e le due radici di quell'equazione quadratica avranno lo *stesso* segno. Quindi troveremo

$$A = 2\rho \iint \frac{\sqrt{H}}{K} \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

I limiti dell'integrazione rispetto a θ conterranno φ, infatti questi limiti si troveranno ponendo $H=0$, e ciò conduce alla seguente equazione quadratica per determinare $\tan\theta$,

$$\tan^2\theta \left\{ \left(\frac{f\cos\varphi + g\operatorname{sen}\varphi}{a^2} \right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{f^2+g^2}{a^2} - \frac{h^2}{c^2}\right) \right\}$$
$$+ \frac{2h\tan\theta}{c^2} \frac{f\cos\varphi + g\operatorname{sen}\varphi}{a^2} + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{f^2+g^2}{a^2}\right) = 0.$$

Allora i limiti di φ si debbono determinare con la condizione che i valori di $\tan\theta$ forniti da questa equazione quadratica siano *eguali*; ciò conduce dopo qualche riduzione alla seguente equazione per determinare i limiti di φ,

$$(f\cos\varphi + g\operatorname{sen}\varphi)^2 = f^2 + g^2 - a^2.$$

Non è però necessario di procedere con queste integrazioni complicate, poichè possiamo ottenere il risultato indirettamente per mezzo del teorema d'Ivory, il quale dà una relazione tra le attrazioni di ellissoidi sopra elementi *esterni* ed *interni*; questo teorema sarà vero per gli *sferoidi* essendo essi inclusi tra gli *ellissoidi*, e poichè l'attrazione di uno sferoide sopra un elemento *interno* è stata già trovata, il teorema ci abiliterà a determinare l'attrazione di uno sferoide sopra un elemento esterno.

185. Richiederemo una definizione preliminare ed una proposizione prima di dare il teorema d'Ivory.

Punti corrispondenti sopra due ellissoidi sono punti di cui le coordinate sono proporzionali agli assi ai quali esse sono rispettivamente parallele.

Negli ellissoidi omofocali la distanza tra due punti, uno su ciascun ellissoide, è eguale alla distanza tra i loro punti corrispondenti.

Dinotino (x,y,z) e (ξ,η,ζ) due punti P e Q sopra un ellissoide di cui i semiassi sono a,b,c; allora i punti corrispondenti P' e Q'

sopra un ellissoide di cui i semiassi sono a', b', c', saranno dinotati da

$$\left(\frac{a'x}{a}, \frac{b'y}{b}, \frac{c'z}{c}\right) \text{ ed } \left(\frac{a'\xi}{a}, \frac{b'\eta}{b}, \frac{c'\zeta}{c}\right).$$

Così

$$PQ'^2 = \left(x - \frac{a'\xi}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b'\eta}{b}\right)^2 + \left(z - \frac{c'\zeta}{c}\right)^2,$$

$$P'Q^2 = \left(\xi - \frac{a'x}{a}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b'y}{b}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{c'z}{c}\right)^2.$$

Quindi $PQ'^2 - P'Q^2 =$

$$(x^2 - \xi^2)\left(1 - \frac{a'^2}{a^2}\right) + (y^2 - \eta^2)\left(1 - \frac{b'^2}{b^2}\right) + (z^2 - \zeta^2)\left(1 - \frac{c'^2}{c^2}\right)$$

$$= (a^2 - a'^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right\},$$

poichè gli ellissoidi sono *omofocali*.

Ma $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2};$$

quindi $$PQ'^2 - P'Q^2 = 0;$$

così $$PQ' = P'Q.$$

Teorema d' Ivory. L' attrazione di un ellissoide sopra un elemento sulla superficie di un ellissoide omofocale risoluta parallelamente ad un asse sta all' attrazione del secondo ellissoide sopra il punto corrispondente sulla superficie del primo ellissoide, così risoluta, come il prodotto degli altri due assi del primo ellissoide sta al prodotto corrispondente nel secondo ellissoide: i due ellissoidi essendo omogenei e della stessa densità.

Siano a, b, c i semiassi del primo ellissoide; a', b', c' quelli del secondo. Dinoti (f, g, h) un punto sulla superficie del primo ellissoide; (f', g', h') il punto corrispondente sulla superficie del secondo ellissoide.

L'attrazione del primo ellissoide sopra un elemento in (f', g', h') risoluta parallelamente all' asse delle x è

$$\iiint \mu \frac{x - f'}{r} \varphi(r)\, dx\, dy\, dz,$$

dove $$r^2 = (x - f')^2 + (y - g')^2 + (z - h')^2,$$

e la legge di attrazione è rappresentata da $\varphi(r)$; μ è una costan-

te; l'integrazione si deve estendere a tutto il volume del primo ellissoide.

Sia $\int \varphi(r)dr=\psi(r)$. S'integri rispetto ad x; e dinotino r_1 ed r_2 i valori di r alle estremità di una corda dell'ellissoide parallela all'asse delle x. Così l'attrazione risoluta è

$$\iint \{ \psi(r_1) - \psi(r_2) \} \, dy \, dz.$$

Nello stesso modo l'attrazione risoluta del secondo ellissoide sopra il punto corrispondente sulla superficie del primo ellissoide si può esprimere con

$$\iint \{ \psi(r'_1) - \psi(r'_2) \} \, dy' \, dz'.$$

Ora supponiamo che si faccia sempre

$$\frac{y}{b}=\frac{y'}{b'} \text{ e } \frac{z}{c}=\frac{z'}{c'};$$

allora abbiamo per la proposizione preliminare

$$r_1 = r_1' \quad \text{ed} \quad r_2 = r_2';$$

ed abbiamo ancora

$$\frac{dy\,dz}{dy'\,dz'}=\frac{bc}{b'\,c'}.$$

Quindi la prima attrazione risoluta sta alla seconda come bc a $b'c'$; e questo stabilisce il teorema.

Si vedrà che la dimostrazione stabilisce qualche cosa di più dell'enunciato del teorema d'Ivory, cioè quanto segue: si prenda un prisma elementare qualunque del primo ellissoide gli spigoli del quale siano corde parallele ad un asse, e si prenda il prisma elementare corrispondente del secondo ellissoide; allora le attrazioni di *questi prismi* risolute parallelamente all'asse sopra i punti corrispondenti stanno come i prodotti degli altri assi: ed il teorema d'Ivory segue dal fatto che gli ellissoidi si possono supporre formati di prismi elementari corrispondenti.

Osserviamo che uno di questi ellissoidi giace interamente dentro dell'altro. In fatti se non è così i punti nei quali essi s'intersegano si troveranno sulla curva di cui le equazioni sono

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{ed} \quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1\,;$$

le coordinate dei punti d'intersezione debbono perciò soddisfare l'equazione

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a'^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b'^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c'^2}\right)=0.$$

Poichè gli ellissoidi sono *omofocali* questa diviene

$$\frac{x^2}{a^2 a'^2}+\frac{y^2}{b^2 b'^2}+\frac{z^2}{c^2 c'^2}=0\,;$$

e questa equazione può essere solamente soddisfatta supponendo che svaniscano x, y, e z; e questi valori non soddisfano alle equazioni degli ellissoidi. Così gli ellissoidi non s'intersegano in alcun punto.

Quindi per trovare l'attrazione di un ellissoide di cui i semiassi sono a, b, c sopra un elemento esterno di cui le coordinate sono f', g', h', dobbiamo prima calcolare l'attrazione, risoluta parallelamente agli assi, di un ellissoide di cui i semiassi sono a', b', c' sopra un elemento interno di cui le coordinate sono f, g, h; queste sei quantità essendo determinate dalle equazioni

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2,\quad a'^2-c'^2=a^2-c^2,$$

$$\frac{f'^2}{a'^2}+\frac{g'^2}{b'^2}+\frac{h'^2}{c'^2}=1\,,$$

$$f=\frac{af'}{a'}\,,\quad g=\frac{bg'}{b'}\,,\quad h=\frac{ch'}{c'}\,;$$

ed allora le parti risolute della richiesta attrazione saranno questi tre risultati calcolati, moltiplicati rispettivamente per

$$\frac{bc}{b'c'}\,,\qquad \frac{ca}{c'a'}\,,\qquad \frac{ab}{a'b'}\,.$$

Si può mostrare che vi è solamente *un* ellissoide che può avere i suoi semiassi a', b', c' che soddisfano alle condizioni richieste nel teorema d'Ivory.

Supponiamo che a, b, c siano in ordine decrescente di grandezza. Si ponga t per c'^2; sia $a^2-c^2=p$, e $b^2-c^2=q$, sicchè p e q sono quantità positive. Abbiamo allora

$$a'^2=p+t,\quad b'^2=q+t\,;$$

così otteniamo l'equazione seguente per determinare t,

$$\frac{f'^2}{p+t}+\frac{g'^2}{q+t}+\frac{h'^2}{t}-1=0.$$

Esaminando i cambiamenti di segno dell'espressione che forma il primo membro di questa equazione, vediamo che vi è una radice tra $-p$ e $-q$, una radice tra $-q$ e 0, ed una radice tra 0 e ∞. Corrispondente alla prima radice otterremo un iperboloide a due falde; corrispondente alla seconda radice un iperboloide ad una falda; e corrispondente alla terza radice un ellissoide.

186. *Dimostrare che l'attrazione risultante degli elementi di un corpo di qualunque figura sopra un elemento di cui la distanza è molto grande in paragone del massimo diametro del corpo attraente, è presso a poco la stessa, come se gli elementi fossero condensati nel loro centro di gravità ed attratti secondo la stessa legge, qualunque essa sia.*

Si prenda l'origine delle coordinate nel centro di gravità del corpo attraente, l'asse delle x che passi per l'elemento attratto; sia c la sua ascissa, e siano x,y,z le coordinate di un elemento qualunque del corpo, ρ la densità di quell'elemento.

Allora la distanza tra questi due elementi, o r,

$$= \sqrt{\{(c-x)^2 + y^2 + z^2\}}.$$

Sia $r\varphi(r^2)$ la legge di attrazione; allora l'intera attrazione parallela all'asse delle x

$$= \iiint \rho(c-x)\,\varphi(c^2 - 2cx + x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz\,,$$

i limiti essendo dati dall'equazione della superficie del corpo. Questa attrazione quindi

$$= \iiint \rho(c-x)\{\varphi(c^2) - (2cx - x^2 - y^2 - z^2)\,\varphi'(c^2) + \ldots\}\,dx\,dy\,dz$$

$$= c\varphi(c^2)\iiint \rho\left\{1 - \frac{x}{c}\left(1 + \frac{2c^2\varphi'(c^2)}{\varphi(c^2)}\right) + (y^2+z^2+3x^2)\frac{\varphi'(c^2)}{\varphi(c^2)} + \ldots\right\}dx\,dy\,dz$$

$$= Mc\varphi(c^2) + c^3\varphi'(c^2)\iiint \rho\,\frac{y^2+z^2+3x^2}{c^2}\,dx\,dy\,dz + \ldots\ldots (A),$$

M essendo la massa del corpo, ed $\iiint \rho\,x\,dx\,dy\,dz = 0$, poichè x è misurata dal centro di gravità del corpo.

Ora supponiamo che x,y,z siano estremamente piccoli in paragone di c; allora tutt'i termini di (A) dopo del primo sono estremamente piccoli in paragone di quel termine, osservando che $c^3\varphi'(c^2)$ è dello stesso ordine di $c\varphi(c^2)$ in termini di c. Quindi l'attrazione risultante è molto prossimamente $Mc\varphi(c^2)$; cioè, essa è molto prossimamente la stessa come se gli elementi fossero

condensati nel loro centro di gravità ed attratti secondo la legge determinata dalla funzione $r\varphi(r^2)$.

187. Dall'Art. 179, apparisce che quando la legge di attrazione è quella del quadrato inverso della distanza, una sfera composta di strati, ciascuno dei quali è omogeneo, attrae un elemento esterno con una forza risultante, che è la stessa come se la sfera fosse condensata nel suo centro. Si può mostrare ancora che *due tali sfere* si attraggono tra loro nello stesso modo come se ciascuna fosse condensata nel suo centro. Infatti si consideri un elemento qualunque della massa della prima sfera; l'attrazione di questo sulla seconda sfera sarà eguale ed opposta all'attrazione risultante della seconda sfera su di esso, e sarà perciò la stessa come se la seconda sfera fosse concentrata nel suo centro. Similmente, l'attrazione di ogni altro elemento della prima sfera sulla seconda sarà la stessa come se la seconda fosse condensata nel suo centro. Procedendo così, troviamo che l'intera azione della prima sfera sulla seconda è la stessa come se la seconda fosse riunita nel suo centro, e quindi l'attrazione scambievole delle sfere è la stessa come se ciascuna fosse raccolta nel suo centro.

Se la legge di attrazione è quella della distanza diretta, allora due corpi di figura qualunque si attraggono tra loro con una forza risultante che è la stessa come se ciascuno fosse raccolto nel suo centro di gravità.

Passiamo alle formole generali per l'attrazione dei corpi di figura qualunque.

188. Si abbia un corpo di forma qualunque; rappresenti ρ la densità di un elemento, il volume del quale è $dx\,dy\,dz$, x, y, z essendo le coordinate dell'elemento. Supponiamo che l'attrazione tra gli elementi di masse m ed m' rispettivamente, alla distanza r, sia $mm'\,F(r)$; allora le componenti X, Y, Z parallele agli assi, e *dall'* origine, dell'attrazione del corpo sopra un elemento di cui la massa è l'unità, e di coordinate a, b, c sono date dalle equazioni

$$X = \iiint \rho \frac{x-a}{r} F(r)\, dx\, dy\, dz,$$

$$Y = \iiint \rho \frac{y-b}{r} F(r)\, dx\, dy\, dz,$$

$$Z = \iiint \rho \frac{z-c}{r} F(r)\, dx\, dy\, dz.$$

$$r \text{ essendo } = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Le integrazioni si debbono prendere in modo da includere tutti gli elementi del corpo attraente.

Sia $\varphi(r)$ la funzione di r che ha $F(r)$ per suo coefficiente differenziale rispetto ad r, e sia

$$U=\iiint \rho\, \varphi(r)\, dx\, dy\, dz,$$

le integrazioni essendo estese in modo da includere tutti gli elementi del corpo attraente; allora sarà

$$X=-\frac{dU}{da},\ Y=-\frac{dU}{db},\ Z=-\frac{dU}{dc}.$$

Infatti $\displaystyle \frac{d\varphi(r)}{da}=\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{dr}{da}=F(r)\frac{dr}{da}=-F(r)\frac{x-a}{r}$;

quindi
$$\begin{aligned} X &= -\iiint \rho \frac{d\varphi(r)}{da}\, dx\, dy\, dz \\ &= -\frac{d}{da}\iiint \rho\, \varphi(r)\, dx\, dy\, dz \\ &= -\frac{dU}{da}. \end{aligned}$$

Similmente si possono stabilire le equazioni $Y=-\frac{dU}{db}$ e $Z=-\frac{dU}{dc}$.

Si può osservare che se in qualche caso, per esempio quello di un solido infinito, l'integrale U diviene infinito, ma i coefficienti differenziali $\frac{dU}{da}$, $\frac{dU}{db}$, $\frac{dU}{dc}$ sono finiti, i valori precedenti di X, Y, Z saranno ancora esatti.

Infatti supponiamo che si prenda una porzione finita del solido; le componenti della sua attrazione avranno per valori i coefficienti differenziali di U. Supponiamo ora che si estenda senza limiti la porzione della massa considerata, le componenti dell'attrazione saranno sempre

$$-\frac{dU}{da},\quad -\frac{dU}{db},\quad -\frac{dU}{dc},$$

sia che U cresca o pur no senza limite. Quindi se quelle espressioni tendono a limiti, quei limiti saranno le componenti dell'at-

trazione del solido infinito. E se esse crescono indefinitamente, possiamo concludere che l'attrazione cresce senza limite a misura che la porzione del corpo che si considera aumenta; questo si esprime dicendo che l'attrazione del solido è infinita.

189. Se la legge di attrazione è quella del quadrato inverso, abbiamo

$$F(r)=\frac{1}{r^2}, \quad \text{e} \quad \varphi(r)=-\frac{1}{r}.$$

Sia $V=-U$, cioè, sia

$$V=\iiint\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

allora, come nell'Articolo precedente, abbiamo per le attrazioni parallele agli assi delle x,y,z rispettivamente, e *dall'* origine,

$$X=\frac{dV}{da}, \quad Y=\frac{dV}{db}, \quad Z=\frac{dV}{dc}.$$

L'equazione che dà V è equivalente alla seguente operazione: *si decomponga la massa attraente in elementi infinitamente piccoli, e si divida la massa di ciascun elemento per la distanza di quell'elemento dall'elemento attratto; la somma di questi quozienti è* V. Quindi, il valore di V sarà del tutto indipendente dagli assi, rettangolari o polari, che possiamo trovare conveniente di impiegare. Supponiamo che si faccia uso delle ordinarie formole polari, e si prenda per origine la posizione dell'elemento attratto; allora l'elemento di volume è (Art. 129) $r^2 \operatorname{sen}\theta\,\delta\varphi\,\delta\theta\,\delta r$; quindi

$$V=\iiint\rho r \operatorname{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Supponiamo che l'elemento attratto formi parte della massa attraente; allora, poichè r svanisce per quegli elementi della massa attraente che sono in contatto con l'elemento attratto, dall'equazione (1) sarebbe dubbio se V sia *finito* in questo caso; ma da (2) vediamo che esso è realmente finito.

190. *Esprimere per mezzo di* V *l'attrazione risoluta secondo una linea qualunque.*

Sia s la lunghezza dell'arco di una curva misurato da un punto fisso sino all'elemento attratto P; siano l, m, n i coseni di direzione della tangente a questa linea in P; R l'attrazione risoluta

secondo questa tangente; allora

$$R = lX + mY + nZ$$
$$= l\frac{dV}{da} + m\frac{dV}{db} + n\frac{dV}{dc}.$$

Ora, se ci restringiamo ai punti che giacciono sulla linea s, V diventerà una funzione della sola s; poichè V è una funzione di a, b e c, e ciascuna di queste si può riguardare come una funzione di s; così avremo pel calcolo differenziale,

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{da}\frac{da}{ds} + \frac{dV}{db}\frac{db}{ds} + \frac{dV}{dc}\frac{dc}{ds};$$

e poichè $\frac{da}{ds} = l$, $\frac{db}{ds} = m$, $\frac{dc}{ds} = n$, abbiamo

$$R = \frac{dV}{ds}.$$

191. *Esaminare il significato della funzione* V.

Questa funzione è di così grande importanza che sarà bene di fermarci un poco sul suo significato.

In primo luogo si deve osservare che l'equazione (1) contiene una definizione fisica di V, che non ha nulla da fare col sistema di coordinate, rettangolari, polari, o altre qualunque, che si possono usare per definire algebricamente le posizioni di P e degli elementi attratti. Così V si deve considerare come una funzione della posizione di P nello spazio, se può permettersi una tale espressione, piuttosto che una funzione delle coordinate di P; sebbene, in conseguenza della sua dipendenza dalla posizione di P, V sarà una funzione delle coordinate di P, di qualunque sorta esse siano.

In secondo luogo, si può osservare che sebbene finora si sia immaginato un elemento attratto come situato in P, pure V ha un significato definito dipendente dalla posizione del punto P, sia che ivi esista un elemento attratto o pur no. Così V si deve considerare come avente un valore definito in ciascun punto dello spazio, indipendentemente dalla materia attraente che può esistere in alcuni luoghi.

La funzione V si chiama il *potenziale* della massa attraente.

192. *Calcolare il valore di* V *nel caso di uno strato sferico, la densità essendo una funzione della distanza dal centro.*

Si prenda per asse delle x la linea retta che congiunge il centro della sfera con l'elemento attratto P, che è evidentemente la direzione dell'attrazione risultante; sia a la distanza di P dal centro; u la distanza di un punto qualunque dello strato attraente dal centro; θ e φ le altre coordinate polari di questo punto; allora la massa dell'elemento in questo punto è $\rho u^2 \operatorname{sen}\theta\, \delta u\, \delta\theta\, \delta\varphi$, e

$$V=\int_{u_1}^{u_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho u^2 \operatorname{sen}\theta\, du\, d\theta\, d\varphi}{r},$$

in cui u_1 ed u_2 sono il raggio interno e l'esterno dello strato; quindi,

$$V=2\pi\int_{u_1}^{u_2}\int_0^{\pi}\frac{\rho u^2 \operatorname{sen}\theta\, du\, d\theta}{r}.$$

Ora $$r^2=u^2-2au\cos\theta+a^2;$$

quindi $$\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dr}=\frac{r}{au},$$

e $$V=\frac{2\pi}{a}\iint \rho u\, du\, dr.$$

Dobbiamo ora distinguere tre casi.

I. Quando P è *al di là* della superficie esterna, i limiti di r sono $a-u$ ed $a+u$; quindi

$$V=\frac{2\pi}{a}\int_{u_1}^{u_2}\int_{a-u}^{a+u}\rho u\, du\, dr$$

$$=\frac{4\pi}{a}\int_{u_1}^{u_2}\rho u^2\, du \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ma se M dinota la massa dello strato sferico,

$$M=4\pi\int_{u_1}^{u_2}\rho u^2\, du;$$

quindi $$V=\frac{M}{a}.$$

Quindi, $X=\dfrac{dV}{da}=-\dfrac{M}{a^2}$, o sia l'attrazione è la stessa come se la massa dello strato fosse raccolta nel suo centro; questo fu dimostrato nell'Art. 167.

II. Quando P è al di *dentro* della superficie interna, i limiti di r sono $u-a$ ed $u+a$; quindi

$$V = \frac{2\pi}{a}\int_{u_1}^{u_2}\int_{u-a}^{u+a} \rho u \, du \, dr.$$

$$= 4\pi \int_{u_1}^{u_2} \rho u \, du \text{ .... } (2).$$

Poichè questo è indipendente da a, abbiamo

$$\frac{dV}{da} = 0.$$

Ciò è equivalente al risultato trovato nell'Art. 168.

III. Combinando i risultati contenuti nelle equazioni (1) e (2), vediamo che se P è *tra* le superficie che limitano lo strato,

$$V = \frac{4\pi}{a}\int_{u_1}^{a} \rho u^2 du + 4\pi \int_{a}^{u_2} \rho u \, du.$$

Da questo possiamo dedurre un risultato contenuto negli Art. 167 e 168, cioè, che *l'attrazione risultante è la stessa come se tutta la massa che è più di* P *vicina al centro fosse raccolta nel centro, ed il resto della materia trascurato.*

193. *In ogni punto* (a, b, c) *dove non vi è alcun elemento della massa attraente, la funzione* V *soddisfa all'equazione differenziale parziale*

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = 0.$$

Infatti poichè $r = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{d}{da}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{x-a}{r^3}, \quad \frac{d}{db}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{y-b}{r^3}, \quad \frac{d}{dc}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{z-c}{r^3},$$

$$\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(x-a)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{d^2}{db^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(y-b)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{d^2}{dc^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(z-c)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3};$$

quindi $$\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{d^2}{db^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{d^2}{dc^2}\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

Ora $$V=\iiint\frac{\rho dx\,dy\,dz}{r};$$

quindi $$\frac{d^2V}{da^2}=\iiint\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{r}\right)\rho dx\,dy\,dz,$$

e simili espressioni si hanno per $\frac{d^2V}{db^2}$ e $\frac{d^2V}{dc^2}$; quindi

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=0.$$

Questo risultato vale finchè l'elemento attratto non è in contatto con la massa attraente. Se, però, l'elemento attratto è in contatto con la massa attraente, r può svanire; e quindi $\frac{1}{r}$ ed i suoi coefficienti differenziali diventare *infiniti;* la dimostrazione precedente non regge in questo caso.

194. *In un punto interno* (a, b, c) *intorno al quale la densità è* ρ, *la funzione* V *soddisfa all'equazione*

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=-4\pi\rho.$$

Per determinare il valore di $\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}$ in questo caso, supponiamo descritta una sfera nel corpo in modo che includa l'elemento attratto, e sia $V=V_1+V_2$, in cui V_2 si riferisce alla sfera e V_1 al rimanente del corpo attraente; allora

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}&=\frac{d^2V_1}{da^2}+\frac{d^2V_1}{db^2}+\frac{d^2V_1}{dc^2}\\&+\frac{d^2V_2}{da^2}+\frac{d^2V_2}{db^2}+\frac{d^2V_2}{dc^2}\\&=\frac{d^2V_2}{da^2}+\frac{d^2V_2}{db^2}+\frac{d^2V_2}{dc^2},\end{aligned}$$

per ciò che è stato già dimostrato.

Ora il centro della sfera si può scegliere tanto vicino all'elemento attratto quanto ci piace, ed il raggio della sfera si può

prendere tanto piccolo che la sua densità si può considerare ultimamente uniforme, ed eguale a quella nel punto (a, b, c).

Siano α, β, γ le coordinate del centro della sfera; allora le attrazioni della sfera sull'elemento parallele agli assi sono, per l'Art. 167,

$$\frac{4}{3}\pi\rho(a-\alpha), \quad \frac{4}{3}\pi\rho(b-\beta), \quad \frac{4}{3}\pi\rho(c-\gamma);$$

quindi
$$\frac{dV_2}{da} = -\frac{4\pi\rho}{3}(a-\alpha), \quad \frac{d^2V_2}{da^2} = -\frac{4\pi\rho}{3},$$
$$\frac{dV_2}{db} = -\frac{4\pi\rho}{3}(b-\beta), \quad \frac{d^2V_2}{db^2} = -\frac{4\pi\rho}{3},$$
$$\frac{dV_2}{dc} = -\frac{4\pi\rho}{3}(c-\gamma), \quad \frac{d^2V_2}{dc^2} = -\frac{4\pi\rho}{3};$$

quindi
$$\frac{d^2V_2}{da^2} + \frac{d^2V_2}{db^2} + \frac{d^2V_2}{dc^2} = -4\pi\rho;$$

quindi
$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = -4\pi\rho.$$

195. *Applicazione alla sfera.* Nell'Art. 192 abbiamo calcolato V con una integrazione diretta nel caso di un corpo composto di strati sferici omogenei. Possiamo dedurre ancora il suo valore per mezzo delle equazioni negli Art. 193 e 194. Questo ora faremo. Se una sfera è composta di strati omogenei, V sarà una funzione della distanza r del centro della sfera dall'elemento attratto; l'attrazione risultante agirà secondo la linea retta che congiunge questi due punti, e sarà dinotata da $\frac{dV}{dr}$.

L'equazione
$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

darà
$$\frac{dr}{da} = \frac{a}{r}, \quad \frac{dr}{db} = \frac{b}{r}, \quad \frac{dr}{dc} = \frac{c}{r};$$

onde
$$\frac{dV}{da} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{da} = \frac{dV}{dr}\frac{a}{r};$$

quindi
$$\frac{d^2V}{da^2} = \frac{a^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{a^2}{r^3}\frac{dV}{dr};$$

similmente $$\frac{d^2V}{db^2}=\frac{b^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}-\frac{b^2}{r^3}\frac{dV}{dr},$$

e $$\frac{d^2V}{dc^2}=\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}-\frac{c^2}{r^3}\frac{dV}{dr}.$$

Addizionando queste equazioni abbiamo, per l'Art. 193, in un punto dove non vi è alcun elemento della massa attraente,

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=0.$$

Questo si può scrivere

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{dV}{dr}\right\}=0;$$

quindi $$\frac{dV}{dr}=\frac{C}{r^2},$$

in cui C è una costante.

Supponiamo che la sfera sia vuota, e che l'elemento attratto sia al di dentro della superficie interna, di cui dinoteremo il raggio con r_1. Poichè l'attrazione deve evidentemente svanire quando $r=0$, dobbiamo avere $C=0$; quindi $\frac{dV}{dr}=0$. Quindi l'attrazione svanisce sempre, e l'elemento è in equilibrio qualunque sia la sua posizione dentro della parte inoccupata della sfera.

Supponiamo in seguito che l'elemento faccia parte della massa della sfera; abbiamo, per l'Art. 194,

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=-4\pi\rho,$$

ρ essendo una data funzione di r.

Si moltiplichi per r^2, e s'integri dal valore r_1 ad r; poichè $\frac{dV}{dr}=0$ per tutt'i punti nell'interno, accade lo stesso al limite r_1; così

$$r^2\frac{dV}{dr}=-4\pi\int_{r_1}^{r}\rho r^2dr.$$

Ma $\int_{r_1}^{r}4\pi r^2\rho dr$ è la massa compresa dentro quella superficie della sfera che passa per l'elemento attratto. Se la chiamiamo M', abbiamo

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{M'}{r^2}.$$

Il valore assoluto dell'attrazione sarà perciò $\frac{M'}{r^2}$; esso è lo stesso come se la massa M' agisse sola e fosse riunita nel suo centro.

Se l'elemento attratto è sulla snperficie esterna avente il suo raggio $= r_2$, abbiamo, se M è l'intera massa della sfera vuota,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{r_2^2},$$

e l'attrazione esercitata sopra questo elemento avrà per suo valore

$$\frac{M}{r_2^2}.$$

Finalmente, si consideri un elemento al di fuori della sfera; cioè, pel quale r è maggiore di r_2; abbiamo come nel primo caso,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{r^2}.$$

Ma in conseguenza della discontinuità proveniente dagli elementi della massa, la costante C non è ristretta ad avere lo stesso valore come per i punti interni. Per determinarla poniamo $r=r_2$; allora, pel caso precedente, dobbiamo avere

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{r_2^2},$$

quindi $$C = -M;$$

ed avremo per i punti esterni,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{r^2}.$$

L'attrazione avrà perciò per suo valore

$$\frac{M}{r^2}.$$

Questo è d'accordo con l'Art. 167.

L'applicazione precedente alla sfera serve molto bene per illustrare le formole, ma non dà una dimostrazione indipendente dei risultati che contiene; poichè il procedimento nell'Art. 194 suppone che l'attrazione di una sfera sopra un elemento interno sia conosciuta. Ma possiamo facilmente ottenere i fatti connessi con l'attrazione di uno strato sferico senza usare l'Art. 194.

Si consideri uno strato sferico di cui la densità sia una funzione qualunque del raggio; allora abbiamo, come si è mostrato nel principio di questo Articolo, il risultato

$$\frac{dV}{dr}=\frac{C}{r^2},$$

in cui C è costante quando passiamo da punto a punto senza entrare nella massa attraente.

Per ogni punto al di dentro della superficie interna dello strato $C=0$, poichè l'attrazione deve svanire quando $r=0$.

Per ogni punto al di fuori della superficie esterna dello strato $C=-M$, poichè per i punti ad una distanza infinitamente grande l'attrazione risultante dello strato deve essere la stessa come se lo strato fosse condensato nel suo centro di gravità; si vegga l'Art. 186.

Così i risultati richiesti sono ottenuti.

196. *Applicazione ad un cilindro indefinito.* Consideriamo ora un cilindro indefinito vuoto composto di strati omogenei, la densità essendo una funzione della distanza dall'asse del cilindro che prendiamo per asse delle z. La sua azione sopra un elemento qualunque sarà diretta verso il punto dove l'asse è incontrato dal piano perpendicolare che passa per l'elemento attratto. Si prenda questo punto dell'asse per origine; sia r la sua distanza dall'elemento attratto; l'attrazione dipenderà solamente da r, ed il suo valore sarà

$$\frac{dV}{dr}.$$

Ma per i punti che non fanno parte della massa del cilindro, abbiamo, per l'Art. 193, osservando che V è indipendente da c,

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}=0,$$

onde

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=0.$$

Moltiplicando per r, abbiamo

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=0;$$

quindi

$$\frac{dV}{dr}=\frac{C}{r}.$$

C essendo una costante.

Osserviamo, come nel caso di una sfera vuota, che i punti esterni allo strato cilindrico e quelli nell'interno essendo separati da quelli dello strato, per i quali le circostanze sono diverse, vi è una discontinuità nel passare dai valori di r maggiori del raggio della superficie esterna, a quelli di r minori del raggio della superficie interna.

Per i punti dell'interno dello strato C è invariabile; ma esso è evidentemente $=0$ quando $r=0$; quindi per tutt'i punti nell'interno

$$\frac{dV}{dr}=0.$$

Quindi concludiamo, che *un cilindro indefinito vuoto composto di strati omogenei non esercita alcuna attrazione sopra un punto situato nel di dentro della sua superficie interna.*

Cerchiamo ora il valore di $\frac{dV}{dr}$ per i punti che appartengono alla massa del cilindro; per questi punti abbiamo, per l'Art. 194,

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=-4\pi\rho,$$

e troviamo con l'integrazione, chiamando r_1 il raggio della superficie interna,

$$r\frac{dV}{dr}=-4\pi\int_{r_1}^{r}\rho r\,dr.$$

Nessuna costante è necessaria, poichè $\frac{dV}{dr}=0$ quando $r=r_1$, essendo così per tutt'i punti dell'interno della superficie di cui il raggio è r_1. Si ponga $r=r_2$, allora

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{4\pi}{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\rho r\,dr.$$

Per i punti esterni dobbiamo avere

$$\frac{dV}{dr}=\frac{C}{r}.$$

Si faccia $r=r_2$, allora, a motivo dell'equazione precedente,

$$C=-4\pi\int_{r_1}^{r_2}\rho r\,dr.$$

La costante essendo così determinata, abbiamo per tutt'i valori di r maggiori di r_2,

$$\frac{dV}{dr}=\frac{C}{r},$$

e l'attrazione del cilindro sarà

$$\frac{C}{r}.$$

Daremo ora alcune proposizioni estratte da un articolo del Prof. Stokes, nel quarto volume del *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, al quale siamo già debitori nell'Art. 191.

197. *Superficie di equilibrio* è una superficie sulla quale un elemento resterebbe in equilibrio se fosse sollecitato dalle forze del sistema, la superficie essendo supposta fissa.

Se V è il potenziale di un corpo attraente sopra un elemento, allora $V=$costante, è l'equazione di una superficie di equilibrio rispetto all'attrazione del corpo. Infatti abbiamo mostrato nell'Art. 190, che $\frac{dV}{ds}$ è eguale all'attrazione risoluta secondo la tangente ad una curva condotta per l'elemento attratto, ma se questa curva è sulla superficie $V=$ costante, allora $\frac{dV}{ds}=0$; cioè, non vi è alcuna forza agente in P nella direzione di una tangente qualunque della superficie $V=$ costante. Quindi, se P è situato sulla superficie, esso resterà in equilibrio. (Art. 33).

Linee di forza sono curve tracciate in modo che la tangente in ogni punto sia la direzione della forza risultante in quel punto. Quindi le *linee di forza* sono perpendicolari alle *superficie di equilibrio*.

198. *Se* S *è una superficie chiusa qualunque alla quale tutta la massa attraente è esterna*, dS *un elemento di* S, *e* dn *un elemento della normale condotta esternamente a* dS, *allora*

$$\int \frac{dV}{dn}\, dS = 0,$$

l'integrale essendo esteso all'intera superficie S.

Sia m' la massa di un elemento attraente situato nel punto P', P' essendo per ipotesi esterno ad S. Per P' si tiri una linea retta L che interseghi S, e si prolunghi indefinitamente in una

direzione da P'. La linea L incontrerà S in generale in due punti; ma se la superficie S è *rientrante* (cioè, una superficie chiusa che può essere segata da un piano tangente) essa può incontrarla in quattro, sei, o un numero pari qualunque di punti. Si dinotino i punti d'intersezione, presi in ordine, con P_1, P_2, P_3, etc., P_1 essendo quello che è più vicino a P'. Con P' per vertice, si descriva intorno alla linea L una superficie conica che contenga un angolo solido infinitamente piccolo misurato dall'area α che la superficie conica taglia da una sfera di raggio l'unità, col suo centro nel vertice del cono; e si dinotino con $A_1, A_2, \ldots$ le aree che la superficie conica taglia da S intorno ai punti $P_1, P_2, \ldots$ Siano $\theta_1, \theta_2, \ldots$ gli angoli che le normali condotte esternamente in $P_1, P_2, \ldots$ fanno con la linea L, presa nella direzione da P_1 a P'; $N_1, N_2, \ldots$ le attrazioni di m' in $P_1, P_2, \ldots$ risolute secondo le normali; $r_1, r_2, \ldots$ le distanze di $P_1, P_2, \ldots$ da P'. È evidente che gli angoli $\theta_1, \theta_2, \ldots$ saranno alternativamente acuti ed ottusi. Allora abbiamo

$$N_1 = \frac{m'}{r_1^2}\cos\theta_1, \quad N_2 = -\frac{m'}{r_2^2}\cos(\pi - \theta_2), \text{ etc.}$$

Abbiamo inoltre nel limite,

$$A_1 = \alpha r_1^2 \sec\theta_1, \quad A_2 = \alpha r_2^2 \operatorname{sen}(\pi - \theta_2), \text{ etc.};$$

e quindi

$$N_1A_1 = \alpha m', \quad N_2A_2 = -\alpha m', \quad N_3A_3 = \alpha m', \text{ etc.};$$

e quindi, poichè il numero dei punti $P_1, P_2, \ldots$ è pari,

$$N_1A_1 + N_2A_2 + N_3A_3 + N_4A_4 \ldots = \alpha m' - \alpha m' + \alpha m' - \alpha m' \ldots = 0.$$

Ora l'intero angolo solido contenuto dalla superficie conica descritta col vertice P', in modo da circoscrivere S, si può dividere in un numero infinito di angoli solidi elementari, a ciascuno dei quali si applicherà il ragionamento precedente; ed è chiaro che l'intera superficie S sarà così esaurita. Abbiamo, quindi,

$$\text{limite di } \Sigma NA = 0;$$

o sia, per la definizione dell'integrale,

$$\int NdS = 0.$$

Lo stesso sarà vero per ogni elemento attraente m'; e quindi, se

N si riferisce all' attrazione dell' intera massa attraente, avremo ancora $\int NdS = 0$. Ma, per l' Art. 190, $N = \frac{dV}{dn}$, il che dimostra la proposizione.

199. *Se* V *è il potenziale di una massa qualunque* M_1, *e se* M_0 *è la porzione di* M_1 *contenuta dentro di una superficie chiusa* S, *allora*

$$\int \frac{dV}{dn} dS = -4\pi M_0,$$

dn e dS avendo lo stesso significato come nell' Art. 198, e l' integrazione essendo estesa all' intera superficie S.

Sia m' la massa di un elemento attraente situato nel punto P' al di dentro di S. Per P' si tiri una linea retta L, e si prolunghi indefinitamente in una direzione. Questa linea incontrerà S in generale in un punto; ma se S è una superficie rientrante, essa può essere incontrata da L in tre, cinque, o un numero dispari qualunque di punti. Intorno ad L si descriva una superficie conica che contenga un angolo solido α infinitamente piccolo, ed avente il suo vertice in P', e sia il resto della notazione come nell' Art. 198. In questo caso, gli angoli $\theta_1, \theta_2, \ldots$ saranno alternativamente ottusi ed acuti, ed avremo

$$N_1 = -\frac{m'}{r_1^2} \cos(\pi - \theta_1) = \frac{m'}{r_1^2} \cos\theta_1,$$

$$A_1 = \alpha r_1^2 \sec(\pi - \theta_1) = -\alpha r_1^2 \sec\theta_1,$$

e quindi $$N_1 A_1 = -\alpha m'.$$

Se vi fosse più di un punto d' intersezione, i termini $N_2 A_2$, $N_3 A_3$, etc. si distruggerebbero scambievolmente a due a due, come nell' Art. 198. Ora tutto lo spazio angolare intorno a P' si può dividere in un numero infinito di angoli solidi come α, ed è evidente che l' intera superficie S sarà così esaurita. Otteniamo, quindi,

$$\text{limite di } \Sigma NA = -\Sigma \alpha m' = -m' \Sigma \alpha;$$

o sia, poichè $\Sigma\alpha = 4\pi$, $\int NdS = -4\pi m'$.

La stessa formola si applicherà ad ogni altro elemento interno, e si è mostrato nell' Art. 198, che per un elemento esterno $\int NdS = 0$. Quindi, addizionando tutt' i risultati, e riferendo ora

N all'attrazione di tutti gli elementi, sì interni che esterni, abbiamo $\int NdS = -4\pi M_0$. Ma $N = \frac{dV}{dn}$, il che dimostra la proposizione.

200. Per le ricerche di M. Chasles sull'attrazione degli ellissoidi, rimandiamo al *Cours de Mécanique* di Duhamel, o alle memorie originali nel *Journal de l'Ecole Polytechnique*, tom. XV, e nelle *Mémoires ... des Savans Etrangers*, tom. IX. Nelle memorie originali si troveranno molti richiami ai precedenti scrittori sull'argomento.

Sulla teoria generale dell'attrazione, lo studente può consultare una memoria di Gauss, tradotta nelle *Scientific Memoirs* di Taylor, vol. III., e nel *Journal de Mathématiques* di Liouville, tom. VII.; ed anche una memoria di M. Chasles nella *Connaissance des Temps pour l'année 1845*.

Importanti note di Plana sopra alcune delle proposizioni di Newton relative all'attrazione si troveranno nelle *Memorie della Reale... Accademia di Torino*, seconda serie, vol. XI., 1851.

Ulteriori indicazioni si troveranno nell'articolo del Prof. Stokes già citato.

Per le applicazioni alla teoria dell'elettricità, rimandiamo ad una serie di articoli del Prof. Thomson in diversi volumi del *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Si vegga il vol. I. p. 94, ed il vol. III. p. 140.

201. Le proposizioni seguenti illustreranno il soggetto di questo Capitolo.

I. Trovare l'attrazione di una lamina uniforme nella figura di un poligono regolare sopra di un elemento situato nella linea retta condotta pel centro della lamina ad angoli retti sul suo piano.

Sia n il numero dei lati del poligono, a la lunghezza della perpendicolare dal centro del poligono sopra un lato. Si conducano gli assi delle x e delle y pel centro della lamina, l'asse delle x essendo perpendicolare ad un lato. Sia c la distanza dell'elemento dalla lamina. L'attrazione risultante agisce secondo la linea retta che congiunge l'elemento col centro della lamina; ed il suo valore è

$$\mu \iint \frac{c\,dx\,dy}{(c^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'integrazione si deve estendere sull'area del poligono. Per eseguire l'integrazione è conveniente di trasformare in coordinate polari; così otteniamo

$$\mu c \iint \frac{r dr\, d\theta}{(c^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dobbiamo integrare rispetto ad r da $r=0$ sino ad $r=a \sec\theta$, e poi rispetto a θ da $\theta=0$ a $\theta=\frac{\pi}{n}$; e moltiplicare il risultato per $2n$.

Ora $$\int \frac{rdr}{(c^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(c^2+r^2)^{\frac{1}{2}}};$$

prendendo questo tra i limiti otteniamo

$$\frac{1}{c} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{c^2\cos^2\theta + a^2}}.$$

Quindi il risultato richiesto è

$$2n\mu c \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \frac{1}{c} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{c^2\cos^2\theta + a^2}} \right\} d\theta,$$

cioè

$$2\mu\pi - 2n\mu c \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2 + c^2 - c^2 \operatorname{sen}^2\theta)}},$$

cioè

$$2\mu\pi - 2n\mu \operatorname{sen}^{-1} \frac{c \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{(a^2+c^2)}}.$$

II. Trovare l'attrazione di una lamina uniforme nella figura di un rettangolo sopra di un elemento situato nella linea retta condotta pel centro della lamina ad angoli retti sul suo piano.

Siano $2a$ e $2b$ la lunghezza e la larghezza del rettangolo, c la distanza dell'elemento dalla lamina. Procedendo come sopra otteniamo l'espressione

$$\mu c \iint \frac{r dr\, d\theta}{(c^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dobbiamo dividere l'integrale in due parti. Per una parte in-

tegriamo rispetto ad r da $r=0$ sino ad $r=a\sec\theta$, e poi rispetto a θ da $\theta=0$ a $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$. Per l'altra parte integriamo rispetto ad r da $r=0$ ad $r=b\operatorname{cosec}\theta$, e poi rispetto a θ da $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ a $\theta=\frac{\pi}{2}$. Moltiplichiamo il risultato per 4.

$$\int_0^{a\sec\theta}\frac{rdr}{(c^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{c}-\frac{\cos\theta}{\sqrt{(c^2\cos^2\theta+a^2)}}.$$

S'integri rispetto a θ; così otteniamo

$$\frac{\theta}{c}-\frac{1}{c}\operatorname{sen}^{-1}\frac{c\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{(a^2+c^2)}}.$$

$$\int_0^{b\operatorname{cosec}\theta}\frac{rdr}{(c^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{c}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{(c^2\operatorname{sen}^2\theta+b^2)}}.$$

S'integri rispetto a θ; così otteniamo

$$\frac{\theta}{c}+\frac{1}{c}\operatorname{sen}^{-1}\frac{c\cos\theta}{\sqrt{(b^2+c^2)}}.$$

Quindi il risultato richiesto è

$$4\mu\left\{\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{cb}{\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(a^2+c^2)}}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{ca}{\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(b^2+c^2)}}\right\},$$

o $$4\mu\left\{\cos^{-1}\frac{cb}{\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(a^2+c^2)}}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{ca}{\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(b^2+c^2)}}\right\},$$

o $$4\mu\operatorname{sen}^{-1}\frac{ab}{\sqrt{(a^2+c^2)}\sqrt{(b^2+c^2)}}.$$

III. Si cerca la forma di un solido di rotazione omogeneo di dato volume, il quale eserciti la massima attrazione in una data direzione sopra un elemento dato, l'attrazione variando come una potenza inversa qualunque della distanza.

Si prenda l'elemento dato per origine, e la direzione data per la linea retta dalla quale misurare la distanza angolare; siano r e θ le coordinate polari di un punto qualunque in un piano fisso che passa per la data direzione. Allora se l'attrazione varia inversamente come l'n^{ma} potenza della distanza, l'attrazione di

un elemento di cui le coordinate sono r e θ si può dinotare con $\frac{\mu}{r^n}$; e la parte risoluta di questa attrazione nella data direzione sarà $\frac{\mu}{r^n}\cos\theta$. Quindi l'equazione

$$\frac{\mu}{r^n}\cos\theta = \text{costante}$$

rappresenta una curva tale che un dato elemento situato in un punto qualunque di essa eserciterà la stessa attrazione sul dato elemento secondo la data direzione. Quindi questa equazione rappresenterà la curva che girando intorno alla data direzione genererà il solido richiesto di massima attrazione, la costante essendo determinata in modo da dare al solido il volume prescritto. È chiaro che sarà così, poichè la superficie che in tal modo otteniamo divide lo spazio in due parti, ed ogni elemento al di fuori della superficie esercita una minore attrazione secondo la data direzione che se fosse situato al di dentro della superficie.

Alcune citazioni connesse con questo problema si troveranno nella *History of the ... Calculus of Variations ...*, pag. 485.

IV. Ogni elemento dell'arco di una curva polare attrae con una forza che varia inversamente come l'n^{ma} potenza della distanza: determinare la forma della curva quando l'attrazione risultante di un arco qualunque della curva sopra di un elemento al polo bisega l'angolo tra i raggi vettori delle estremità dell'arco.

Si prenda il polo per origine, ed una linea retta qualunque tirata per esso per linea iniziale. Siano r e θ le coordinate polari di un elemento ds dell'arco. Si risolva l'attrazione dell'arco sopra un elemento al polo secondo la linea iniziale, e ad angoli retti ad essa; otteniamo per queste due componenti

$$\int_0^\alpha \frac{\mu}{r^n}\cos\theta\frac{ds}{d\theta}\,d\theta \quad \text{ed} \quad \int_0^\alpha \frac{\mu}{r^n}\,\text{sen}\,\theta\frac{ds}{d\theta}\,d\theta\,,$$

in cui l'arco considerato si estende da $\theta=0$ a $\theta=\alpha$. Quindi, per ipotesi,

$$\frac{\int_0^\alpha \frac{\mu}{r^n}\,\text{sen}\,\theta\frac{ds}{d\theta}\,d\theta}{\int_0^\alpha \frac{\mu}{r^n}\cos\theta\frac{ds}{d\theta}\,d\theta} = \tan\frac{\alpha}{2}\,.$$

Si ponga $\varphi(\theta)$ per $\frac{1}{r^n}\frac{ds}{d\theta}$; così abbiamo

$$\int_0^\alpha \varphi(\theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \tan \frac{\alpha}{2} \int_0^\alpha \varphi(\theta) \cos \theta \, d\theta.$$

Ora questa relazione deve valere per tutt'i valori di α, e quindi possiamo differenziare i due membri rispetto ad α. Così, pel Calcolo integrale, abbiamo

$$\varphi(\alpha) \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^\alpha \varphi(\theta) \cos \theta \, d\theta + \tan \frac{\alpha}{2} \varphi(\alpha) \cos \alpha ;$$

quindi

$$2 \varphi(\alpha) \left(\operatorname{sen} \alpha - \tan \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right) \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \int_0^\alpha \varphi(\theta) \cos \theta \, d\theta ,$$

cioè

$$\varphi(\alpha) \operatorname{sen} \alpha = \int_0^\alpha \varphi(\theta) \cos \theta \, d\theta .$$

Si differenzii di nuovo rispetto ad α; così

$$\varphi(\alpha) \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \frac{d}{d\alpha} \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) \cos \alpha ;$$

onde

$$\frac{d}{d\alpha} \varphi(\alpha) = 0.$$

Così $\varphi(\alpha)$ è costante per tutt'i valori di α, cioè

$$\frac{1}{r^n} \frac{ds}{d\theta} = \text{ad una costante} = k \text{ poniamo.}$$

Questo risultato si poteva prevedere: esso esprime che gli elementi della curva che sottendono al polo angoli eguali infinitesimi esercitano ivi azioni eguali sull'elemento.

Quindi

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = k^2 r^{2n} ;$$

questo conduce o a $\frac{dr}{d\theta} = 0$, o pure a

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = \frac{1}{k^2 r^{2n} - r^2} .$$

La prima supposizione rende r costante, e così dà un cerchio. Prendendo la seconda, e ponendo $\frac{1}{u}$ per r abbiamo

$$d\theta = \frac{u^{n-2} \, du}{\sqrt{(k^2 - u^{2n-2})}} ,$$

sicchè $$(n-1)\,\theta + C = \text{sen}^{-1}\frac{u^{n-1}}{k},$$

in cui C è una costante.

Quindi $$\frac{1}{r^{n-1}} = k\,\text{sen}\,\{(n-1)\theta + C\}.$$

Se $n=2$ otteniamo
$$1 = kr\,\text{sen}\,(\theta + C),$$
che è l'equazione di una linea retta: si vegga l'Art. 159.

Se $n=3$ otteniamo
$$1 = kr^2\,\text{sen}(2\theta + C),$$
che è l'equazione di un'iperbola rettangolare, il polo essendo al centro.

ESEMPII.

Negli Esempii seguenti si deve supporre la legge ordinaria di attrazione, a meno che non si dica il contrario.

1. Un solido è generato dalla rotazione di un settore di circolo intorno ad uno dei suoi raggi limiti; trovare l'attrazione sopra un elemento al centro.

Risultato. $\pi a\rho\,\text{sen}^2\beta$.

2. L'orlo di una coppa emisferica consiste di materia ripellente con una forza che varia direttamente come la distanza; mostrare che un elemento situato *dovunque* sulla superficie concava sarà in equilibrio.

3. Un tubo in forma di una parabola è situato col suo asse verticale ed il vertice in basso; un elemento pesante è posto nel tubo, ed una forza ripulsiva agisce sull'elemento secondo l'ordinata: trovare la legge della forza affinchè essa possa sostenere l'elemento in ogni posizione.

4. Una porzione di un cilindro di uniforme densità è limitato da una superficie sferica, il raggio della quale è maggiore di quello del cilindro, ed il centro coincide col punto medio della base; trovare l'attrazione sopra un elemento in questo punto.

Risultato. $2\pi\rho a - \frac{\pi\rho a^2}{b}$; dove a è il raggio del cilindro e b il raggio della sfera.

5. Trovare l'attrazione risultante di un segmento sferico sopra un elemento nel suo vertice.

Risultato. $2\pi h\rho\left\{1-\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{2h}{a}\right)}\right\}$,

in cui a è il raggio della sfera ed h l'altezza del segmento.

6. Trovare l'attrazione risultante di un segmento sferico sopra un elemento al centro della sua base.

Risultato. $\frac{2\pi h\rho}{3(a-h)^2}\left\{3a^2-3ah+h^2-(2a-h)^{\frac{3}{2}}h^{\frac{1}{2}}\right\}$.

7. Trovare il luogo di un punto tale che la sua attrazione risultante sopra una linea retta fissa passi sempre per un punto fisso nella linea retta.

Risultato. Una sfera.

8. Trovare l'attrazione di un segmento di un paraboloide di rotazione, limitato da un piano perpendicolare al suo asse, sopra un elemento al fuoco.

Risultato. $4\pi\rho a \log\frac{x+a}{a}$, in cui x è la distanza del piano limite dal vertice.

9. Intorno alla circonferenza di un circolo sono disposti simmetricamente n centri eguali di forza; ciascuna forza è ripulsiva e varia inversamente come l'm^{ma} potenza della distanza. Un elemento è situato nel piano del circolo molto vicino al suo centro; mostrare che approssimativamente la forza risultante su di esso tende al centro del circolo e varia come la distanza dell'elemento dal centro, eccetto quando $m=1$.

10. Otto centri di forza, posti nei vertici di un cubo, attraggono, secondo la stessa legge e con la stessa intensità assoluta, un elemento situato molto vicino al centro del cubo; mostrare che la loro attrazione risultante passa pel centro del cubo, a meno che la legge della forza non sia quella del quadrato inverso della distanza.

11. Se la legge della forza nell'esempio precedente è quella del quadrato inverso della distanza trovare il valore approssimato dell'attrazione sopra un elemento situato molto vicino al centro.

Risultato. Si prendano il centro del cubo per origine e gli assi paralleli agli spigoli del cubo; allora se x, y, z sono le coordinate dell'elemento l'attrazione parallela all'asse delle x è approssimativamente

$$\frac{56x}{9(a\sqrt{3})^5}(3y^2+3z^2-2x^2)$$

verso l'origine; $2a$ essendo la lunghezza di uno spigolo.

12. L'attrazione di una verga uniforme di lunghezza indefinita sopra un elemento esterno varia come (la distanza)$^{-1}$ del punto dalla verga. Dimostrare ciò, e supponendo che gli assintoti di un'iperbola consistano di tale materia, mostrare che un elemento sarà in equilibrio in un punto qualunque dell'iperbola, e che la pressione sulla curva in ogni punto è proporzionale alla lunghezza della tangente intercetta tra gli assintoti.

13. Una lamina ellittica attrae un elemento interno (x, y) con una forza che varia inversamente come la distanza; mostrare che se X, Y sono le intere attrazioni parallele agli assi,

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = \text{costante}.$$

14. Se A, B, C sono le attrazioni di un ellissoide in direzioni parallele ai suoi assi sopra un elemento interno situato nel punto (f, g, h), mostrare che

$$\frac{A}{f} + \frac{B}{g} + \frac{C}{h} = 4\pi\rho.$$

(Si veggano gli Art. 183 e 194).

15. L'attrazione risultante di un elemento che attrae secondo il cubo inverso della distanza sopra una lamina piana è la stessa come su quella parte dello strato sferico descritto intorno all'elemento come centro e tangente al piano della lamina, che è tagliata dalle linee rette tirate dal centro al contorno della lamina.

16. Un elemento attratto da due centri di forza in A e B è situato in una scannellatura fissa. Mostrare che l'elemento rimane in equilibrio in qualunque punto sia situato, purchè la forma della scannellatura sia tale che

$$(AP - c)(BP - c') = cc',$$

dove c, c' sono costanti che dipendono dalle forze assolute.

17. Se una porzione di un sottile strato sferico, le di cui proiezioni sopra i tre piani coordinati condotti pel centro sono A, B, C, attrae un elemento al centro con una forza che varia come una funzione qualunque della distanza, mostrare che l'elemento incomincerà a muoversi nella direzione della linea retta che ha per equazioni

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}.$$

18. Gli elementi di un sottile strato emisferico attraggono con una forza $= \mu$ (distanza), e quelli di uno strato conico retto re-

pellono con una forza $= \mu$ (distanza). Gli orli delle loro basi coincidono, ed i loro vertici sono rivolti in direzioni opposte, mostrare che un elemento sarà in equilibrio sull'asse comune prolungato ad una distanza dal vertice della sfera = alla lunghezza dell'asse del cono, l'angolo al vertice del cono essendo $2\tan^{-1}\frac{4}{3}$.

19. Mostrare che se l'attrazione varia inversamente come la distanza, un anello piano infinitamente sottile non esercita alcuna forza sopra un elemento nel piano dell'anello al di dentro della sua circonferenza interna.

[Questo e l'esempio seguente dipendono dall'integrale

$$\int_0^\pi \frac{(a - c\cos\theta)\, d\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta};$$

pel quale si può consultare il Calcolo integrale].

20. Mostrare che se l'attrazione varia inversamente come la distanza, un anello piano infinitamente sottile attrae un elemento nel piano dell'anello al di là della sua circonferenza esterna nello stesso modo come se la massa dell'anello fosse riunita nel suo centro.

21. Se una linea retta è il corpo attraente, mostrare che le *linee di forza* sono iperbole e le *superficie di equilibrio* sferoidi. (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. III, p. 94).

22. Dalla proposizione stabilita nell'Art. 199, dedurre quella stabilita nell'Art. 194. (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. V, p. 215).

CAPITOLO XI.

Velocità virtuali.

202. Passiamo a stabilire un teorema generale rispetto all'equilibrio di un corpo o di un sistema di corpi, chiamato il *Principio delle Velocità Virtuali*.

Quando un sistema di elementi è in equilibrio, e *supponiamo* ciascuno di essi situato in una posizione infinitamente vicina a quella che realmente occupa, senza turbare la connessione scambievole delle parti del sistema, la linea retta che congiunge la prima posizione di un elemento con la seconda si chiama la *velocità virtuale di quell' elemento*.

Si usa la parola *velocità* poichè possiamo concepire che tutti gli spostamenti si facciano nello *stesso* tempo infinitamente piccolo, ed allora gli spazii descritti sono proporzionali alle velocità. Si usa la parola *virtuale* per indicare che gli spostamenti non si fanno realmente, ma sono solamente *supposti*. Riteniamo la fraseologia stabilita, ma è evidente da queste spiegazioni che le parole *velocità virtuale* potrebbero essere convenientemente sostituite da *spostamento ipotetico*.

Con le parole, *senza turbare la connessione scambievole delle parti del sistema*, intendiamo, che ogni corpo rigido che esiste nel sistema si suppone rimanere di forma invariabile, e che ogni verga o fune che connette diverse parti del sistema non debba rompersi. Questo, almeno, servirà come un'indicazione preliminare per assistere il lettore, e ritorneremo ancora sull'argomento; si vegga l'Art. 212. Quindi, a motivo di questa limitazione le velocità virtuali delle diverse parti di un sistema sono frequentemente così connesse che prese ad arbitrio quelle di un numero definito di punti, le rimanenti ne seguono necessariamente.

203. La velocità virtuale di un elemento valutata in una data direzione è la proiezione della velocità virtuale su questa direzione; essa si considera positiva quando la direzione del movimento dell'elemento, nel passare dalla sua prima posizione alla seconda, fa un angolo acuto con quella secondo la quale valutiamo la velocità. Così la velocità virtuale di un elemento valutata secondo una data linea retta qualunque si trova in grandezza ed in segno, moltiplicando la velocità virtuale assoluta pel coseno dell'angolo che la sua direzione fa con la data linea retta.

Il *momento virtuale* di una forza è il prodotto della sua inten-

sità per la velocità virtuale del suo punto d'applicazione *valutata nella direzione della forza.*

Possiamo ora enunciare il principio delle velocità virtuali.

Se un sistema qualunque di elementi è in equilibrio, e si concepisca uno spostamento di tutti gli elementi che è conciliabile con le condizioni alle quali essi sono soggetti, *la somma dei momenti virtuali di tutte le forze è zero, qualunque sia lo spostamento. E viceversa, se questa relazione ha luogo per tutti gli spostamenti virtuali, il sistema è in equilibrio.*

204. Lo studente ricaverà dalle dimostrazioni che seguono un migliore concetto del significato del principio che dal suo semplice enunciato; egli è, infatti, necessario di ottenere una veduta generale dell'intero soggetto prima di cercare di comprendere pienamente le definizioni e le proposizioni preliminari. Si può fare un'osservazione allo scopo di anticipare una difficoltà; ciascun *momento virtuale* è per definizione una quantità infinitamente piccola, cioè, ultimamente svanisce, sicchè sembra che il principio equivalga solamente a questo, *si prenda ciascuna forza del sistema e si moltiplichi per una quantità che ultimamente svanisce, allora la somma di questi prodotti svanisce.* Il principio, però, implica più di questo, come vedremo.

Il termine conveniente *momento virtuale* è dato da Duhamel; però può essere utile di enunciare il principio delle velocità virtuali senza introdurre questo termine, e diamo perciò quanto segue.

Supponiamo un sistema materiale mantenuto in equilibrio da forze qualunque, e supponiamo che i punti di applicazione delle forze si muovano per spazii piccolissimi in un modo conciliabile con la connessione scambievole delle parti del sistema. Si abbassino le perpendicolari dalle nuove posizioni dei punti sulle direzioni delle forze che agiscono sui punti nelle loro posizioni di equilibrio. La distanza tra il piede di ciascuna perpendicolare ed il punto primitivo di applicazione della forza corrispondente, si chiama la velocità virtuale del punto rispetto a quella forza, ed è considerata positiva o negativa, secondo che la perpendicolare cade dalla parte del punto verso il quale la forza agisce o dalla parte opposta. Allora il principio è questo, *la somma algebrica dei prodotti di ciascuna forza del sistema per la velocità virtuale corrispondente svanisce. E viceversa, se la somma svanisce per ogni spostamento il sistema è in equilibrio.*

Prima di passare ad una dimostrazione generale, considereremo due casi semplici, quello di un elemento, e quello di una verga rigida sollecitata da forze nelle sue estremità.

205. Supponiamo che delle forze agiscano sopra di un solo elemento e lo mantengano in equilibrio.

Dinotino $P_1, P_2, \ldots$ le forze; $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ gli angoli che le loro direzioni fanno rispettivamente con una linea retta fissa *qualunque* scelta arbitrariamente; allora, per l' Art. 29,

$$\Sigma P \cos \alpha = 0.$$

Se ogni termine di questa equazione si moltiplica per la quantità arbitraria r, abbiamo $\Sigma Pr \cos\alpha = 0$. Ma $r \cos\alpha_1$ è la proiezione della lunghezza r, misurata secondo la linea fissa, sulla direzione della forza P_1; un simile significato si può assegnare ad $r \cos \alpha_2$, $r \cos \alpha_3, \ldots$ Inoltre r si può considerare come la distanza della prima posizione dell' elemento da una seconda posizione arbitrariamente scelta, e quindi, quando r diminuisce indefinitamente $r \cos \alpha_1$, $r \cos \alpha_2, \ldots$ diventano le velocità virtuali dell' elemento rispetto a $P_1, P_2, \ldots$ Quindi, il principio vale in questo caso.

Viceversa, se $\Sigma Pr \cos \alpha = 0$ per tutte le direzioni dello spostamento; allora, $\Sigma P \cos \alpha = 0$ per tutte le direzioni, e l'elemento è in equilibrio sotto l'azione delle forze date.

In questo caso, osserviamo che lo spostamento ipotetico dell' elemento può essere di qualunque grandezza ci piace, e che la somma dei prodotti di ciascuna forza per la proiezione dello spostamento sulla sua direzione è non solo *ultimamente* ma *sempre* zero.

206. Poichè quando un sistema di forze agenti su di un elemento è in equilibrio, ciascuna forza è eguale ed opposta alla risultante di tutte le altre forze, e, siccome abbiamo ora veduto, la somma dei prodotti di ciascuna forza per la sua *velocità virtuale* è zero, ne segue, che il prodotto di ciascuna forza per la sua velocità virtuale è numericamente eguale alla somma di tali prodotti per ogni sistema di forze col quale essa è in equilibrio, ma è di segno opposto. Quindi se una forza sola è la risultante di un sistema di forze agenti in un punto il prodotto della forza sola per la sua velocità virtuale è eguale alla somma di tali prodotti per il sistema di forze.

207. In seguito, supponiamo una verga rigida sollecitata da una forza a ciascuna estremità. Siano x,y,z le coordinate di un estremo, ed x',y',z' quelle dell'altro; l la lunghezza della verga; allora

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = l^2 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Supponiamo la verga spostata; siano δx, δy, δz le variazioni

delle coordinate di un estremo; $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ quelle delle coordinate dell'altro estremo; allora

$$(x+\delta x-x'-\delta x')^2+(y+\delta y-y'-\delta y')^2+(z+\delta z-z'-\delta z')^2=l^2 \;\ldots\; (2).$$

Da (1) e (2),

$$2(x-x')(\delta x-\delta x')+2(y-y')(\delta y-\delta y')+2(z-z')(\delta z-\delta z')$$
$$+(\delta x-\delta x')^2+(\delta y-\delta y')^2+(\delta z-\delta z')^2=0 \;\ldots\ldots\; (3).$$

Siano α, β, γ gli angoli che la direzione primitiva della verga fa con gli assi; allora

$$x'-x=l\cos\alpha\,,\quad y'-y=l\cos\beta\,,\quad z'-z=l\cos\gamma \;\ldots\; (4).$$

Se quindi, in (3), *trascuriamo i termini* $(\delta x-\delta x')^2$, $(\delta y-\delta y')^2$, $(\delta z-\delta z')^2$ *in paragone di quelli che riteniamo*, abbiamo

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+(z-z')(\delta z-\delta z')=0,$$

o pure, per mezzo di (4),

$$\delta x\cos\alpha+\delta y\cos\beta+\delta z\cos\gamma=\delta x'\cos\alpha+\delta y'\cos\beta+\delta z'\cos\gamma \;\ldots\; (5).$$

Supponiamo che P sia la risultante delle forze che agiscono in un estremo della verga, e P' la risultante di quelle che agiscono nell'altro estremo; allora, perchè vi sia equilibrio, queste forze debbono essere eguali in grandezza e debbono agire secondo la verga in direzioni opposte. Questo è evidente, o pure si può mostrare facilmente per l'Art. 73. Poichè dunque $P'=-P$, abbiamo da (5)

$$P(\delta x\cos\alpha+\delta y\cos\beta+\delta z\cos\gamma)$$
$$+P'(\delta x'\cos\alpha+\delta y'\cos\beta+\delta z'\cos\gamma)=0 \;\ldots\; (6).$$

Siccome P agisce *secondo* la verga, il primo termine è il prodotto di P per la velocità virtuale risoluta del suo punto di applicazione, ed il secondo termine è un simile prodotto per P'; quindi, il principio delle velocità virtuali vale in questo caso.

L'inverso di questo teorema è vero in questo caso, ma non daremo di esso una dimostrazione separata; la dimostrazione generale dell'Art. 208 chiarirà sufficientemente questo punto.

Se (5) fosse *assolutamente vera*, allora nel caso della verga, come in quello di un solo elemento, la somma dei prodotti di ciascuna forza per la proiezione dello spostamento del suo punto di applicazione sulla direzione della forza sarebbe zero, sia che *lo spostamento fosse finito o infinitesimo*. Ma (5) invece di essere assolutamente vera si è ottenuta da (3) trascurando *i quadrati ed i prodotti degli spostamenti risoluti* δx, $\delta x'$, δy, ...

208. Passiamo a stabilire la verità del principio nel caso di un corpo rigido. Ammetteremo che ogni spostamento possibile di un corpo rigido si possa produrre, facendo prima girare il corpo intorno ad un asse, e poi movendo tutti gli elementi del corpo per spazii eguali in direzioni parallele. Supponiamo, per semplicità, che l'asse delle z si faccia coincidere con l'asse intorno al quale gira il corpo; sia θ l'angolo pel quale il corpo gira, allora le coordinate di un elemento che erano primitivamente x ed y diverranno, *se trascuriamo il quadrato e le potenze superiori di* θ, $x-y\theta$ ed $y+x\theta$ rispettivamente; la coordinata c dell'elemento rimane inalterata.

Sia ora il corpo spostato ulteriormente, in modo che ciascun elemento percorra uno spazio di cui a,b,c sono le proiezioni sugli assi delle coordinate; allora se δx, δy, δz dinotano le variazioni *totali* delle coordinate x, y, z di un elemento, abbiamo

$$\delta x = a - y\theta, \quad \delta y = b + x\theta, \quad \delta z = c.$$

Poichè le forze che agiscono sul corpo rigido si suppone che lo mantengano in equilibrio, abbiamo per l'Art. 73,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Si moltiplichi la prima di queste equazioni per a, la seconda per b, la terza per c, e la sesta per θ, e si addizioni; allora troviamo

$$\Sigma\{X(a - y\theta) + Y(b + x\theta) + Zc\} = 0,$$

o sia

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

Dinoti P_1 la forza di cui X_1, Y_1, Z_1 sono le componenti, e P_2, P_3, ... abbiano simili significati; e siano δp_1, δp_2, ... le velocità virtuali risolute corrispondenti a queste forze; allora, per l'Art. 205, l'equazione precedente si può scrivere

$$\Sigma P\delta p = 0.$$

Ciò dimostra il principio nel caso di un corpo rigido.

Viceversa, se la somma dei prodotti delle forze per le velocità virtuali risolute svanisce per ogni possibile spostamento di un corpo rigido, le forze mantengono il corpo in equilibrio.

Infatti supponiamo, in primo luogo, che il corpo si sposti in modo che ogni suo punto percorra parallelamente all'asse delle x lo spazio a; allora abbiamo, per ipotesi,

$$\Sigma Xa = 0;$$

quindi

$$\Sigma X = 0.$$

Similmente, con convenevoli spostamenti, possiamo dimostrare che

$$\Sigma Y = 0, \quad \text{e} \quad \Sigma Z = 0.$$

In secondo luogo, supponiamo che il corpo giri intorno all'asse delle z per un piccolo angolo θ; allora, per ipotesi,

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y) = 0,$$

e $$\delta x = -y\theta, \quad \delta y = x\theta;$$

quindi $$\theta \Sigma (Xy - Yx) = 0;$$

onde $$\Sigma (Yx - Xy) = 0.$$

Similmente, con convenevoli spostamenti, possiamo dimostrare

$$\Sigma (Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma (Xz - Zx) = 0.$$

Quindi, reggono le sei equazioni di equilibrio.

Se si ha un sistema di due o più corpi rigidi, allora, siccome il principio delle velocità virtuali vale per ogni possibile spostamento di ciascuno dei corpi, esso vale per ogni possibile spostamento del sistema.

209. Nell'Art. 207 abbiamo semplificata la dimostrazione della prima parte del principio delle velocità virtuali, supponendo che l'asse delle z coincida con quello intorno al quale il corpo fu assoggettato ad uno spostamento angolare. Il procedimento sarà come segue, se supponiamo che lo spostamento abbia luogo intorno ad una linea retta condotta per l'origine, ed inclinata agli assi sotto angoli i di cui coseni di direzione sono l, m, n.

Sia r la distanza di un punto qualunque (x,y,z) dall'origine; φ l'angolo che questa distanza fa con la linea retta data; ρ la perpendicolare da (x,y,z) sulla linea retta data; allora

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\cos\varphi = \frac{lx}{r} + \frac{my}{r} + \frac{nz}{r};$$

quindi $$\rho^2 \text{ o } r^2 \operatorname{sen}^2\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - (lx + my + nz)^2.$$

Supponiamo che il corpo giri per un piccolo angolo θ intorno alla linea data; siano $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, le coordinate di quel punto del corpo che era primitivamente in (x,y,z).

Poichè r e ρ non cambiano con lo spostamento, abbiamo, trascurando $(\delta x)^2$, $(\delta y)^2$, $(\delta z)^2$ in paragone di δx, δy, δz,

$$0 = x\delta x + y\delta y + z\delta z,$$

$$0 = l\delta x + m\delta y + n\delta z;$$

quindi $\dfrac{\delta x}{yn - zm} = \dfrac{\delta y}{zl - xn} = \dfrac{\delta z}{xm - yl} = \lambda$ supponiamo ... (1).

E siccome $\left\{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 2\rho \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}\theta,$

$$\lambda\left\{(yn - zm)^2 + (zl - xn)^2 + (xm - yl)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 2\rho \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta,$$

o sia $\lambda\left\{x^2 + y^2 + z^2 - (lx + my + nz)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 2\rho \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}\theta;$

quindi $\lambda = \theta$ .... (2),

trascurando θ^2 e le potenze superiori di θ.

Supponiamo che il corpo si sposti ulteriormente, in modo che ciascun elemento percorra gli spazii a,b,c paralleli agli assi delle coordinate; se δx, δy, δz dinotano ora gli spostamenti *totali* dell'elemento di cui le coordinate primitive erano x,y,z, abbiamo

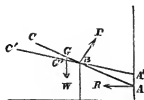
$$\delta x = (yn - zm)\,\theta + a,$$
$$\delta y = (zl - xn)\,\theta + b,$$
$$\delta z = (xm - yl)\,\theta + c.$$

Si moltiplichino le sei equazioni nell'Art. 73 per $a, b, c, -l\theta, -m\theta, -n\theta$, rispettivamente, e si sommi, allora

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

210. Illustreremo il principio delle velocità virtuali nella soluzione del seguente problema.

Una trave in un piano verticale poggia sopra un palo B e contro un muro in A; si cercano le circostanze dell'equilibrio.

Sia la distanza di B dal muro $= b$; sia G il centro di gravità della trave; $AG = a$; e l'inclinazione della trave al muro $= \theta$. La reazione (P) del palo in B è perpendicolare alle superficie in contatto, e quindi alla trave; la reazione (R) del muro è perpendicolare al muro per la stessa ragione; sia W il peso della trave. Possiamo considerare la trave in equilibrio sotto l'azione di P,R,W, e supporre che il palo ed il muro siano rimossi.

Ora l'oggetto del problema potrebbe essere, di determinare solamente la posizione di equilibrio, o anche di determinare P

e non R, o pure R e non P, o di determinare P ed R ed anche la posizione di equilibrio. Risolveremo il problema col principio delle velocità virtuali in queste quattro supposizioni, a motivo di spiegare il modo da procedere per evitare lavoro per quanto è possibile secondo la natura della questione.

(1) Supponiamo che si voglia solo la posizione di equilibrio. Dobbiamo allora dare alla trave un piccolo movimento geometrico arbitrario tale che le pressioni ignote P ed R non si trovino nell'equazione delle velocità virtuali; la trave deve rimanere perciò in contatto col muro e col palo, come nella figura.

Sia $\delta\theta$ l'accrescimento di θ dovuto allo spostamento. Allora l'altezza di G sulla linea retta orizzontale condotta per B, (o z), prima dello spostamento

$$= GB\cos\theta = (a - b\operatorname{cosec}\theta)\cos\theta = a\cos\theta - b\cot\theta;$$

l'altezza dopo lo spostamento si trova cambiando θ in $\theta+\delta\theta$ in questa espressione; quindi, lo spazio verticale descritto da G o δz

$$= a\cos(\theta+\delta\theta) - b\cot(\theta+\delta\theta) - (a\cos\theta - b\cot\theta)$$

$$= \left(\frac{b}{\operatorname{sen}^2\theta} - a\operatorname{sen}\theta\right)\delta\theta;$$

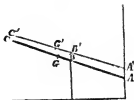
e, pel principio delle velocità virtuali, $W\delta z=0$; quindi

$$b - a\operatorname{sen}^3\theta = 0, \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

e questo determina la *posizione di equilibrio*.

(2) Ma supponiamo che si voglia trovare la pressione P e la posizione di equilibrio.

Dobbiamo in questo caso staccare la trave dal palo, affinchè la velocità virtuale di B rispetto a P non svanisca, e quindi P non sparisca come nel primo caso.

Sia $AA'=c$, e sia, come sopra, $\delta\theta$ il cangiamento di θ. Dobbiamo trovare lo spostamento di B valutato secondo la linea di azione di P. Ora si concepisca la trave condotta nella sua seconda posizione in due passi; prima movendosi parallelamente a sè stessa finchè l'estremità inferiore venga in A', e poi girando intorno ad A' per un piccolo angolo $\delta\theta$. Col primo passo B percorre uno spazio parallelo ed eguale ad AA'; col secondo passo B descrive un piccolo arco di cerchio la lunghezza

del quale è $AB \cdot \delta\theta$, cioè $b \operatorname{cosec} \theta \delta\theta$. Così lo spostamento di B valutato secondo la linea di azione di P si trova essere ultimamente $c \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{cosec} \theta \delta\theta$.

Similmente col primo passo G percorre uno spazio eguale e parallelo ad AA', e col secondo passo G descrive un piccolo arco di cerchio la lunghezza del quale è $a\delta\theta$. Così lo spostamento di G risoluto verticalmente in basso è ultimamente $a\delta\theta \operatorname{sen} \theta - c$.

Quindi, pel principio delle velocità virtuali,

$$W(a \operatorname{sen} \theta \delta\theta - c) + P(c \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{cosec} \theta \delta\theta) = 0\,;$$

onde, $$\delta\theta(Wa \operatorname{sen} \theta - Pb \operatorname{cosec} \theta) - c(W - P \operatorname{sen} \theta) = 0\,;$$

e, siccome c e $\delta\theta$ possono essere piccole quantità qualunque indipendenti,

$$Wa \operatorname{sen} \theta - Pb \operatorname{cosec} \theta = 0\,, \quad W - P \operatorname{sen} \theta = 0\,;$$

quindi $$\operatorname{sen} \theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,, \quad \text{e} \quad \frac{P}{W} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\,.$$

(3) Supponiamo che si voglia conoscere R e la posizione di equilibrio, e non P.

Allora dobbiamo spostare la trave in modo da dare ad A una velocità virtuale rispetto ad R, ma non una a B rispetto a P.

La trave deve perciò rimanere ancora a contatto con la caviglia. Sia $AA' = c$, e sia α l'angolo che AA' fa con la verticale. Ora si concepisca la trave condotta nella sua seconda posizione con due passi; prima movendosi parallelamente a sè stessa finchè l'estremità inferiore venga in A', e poi girando intorno ad A' per un angolo $\delta\theta$ in modo da condursi di nuovo a contatto con la caviglia. Lo spostamento di A valutato secondo la linea di azione di R è $c \operatorname{sen}\alpha$. Lo spostamento di G valutato verticalmente in basso è $a\delta\theta \operatorname{sen}\theta - c\cos\alpha$.

Inoltre vi è una relazione tra $\delta\theta$, c, ed α, proveniente dal fatto che lo spostamento totale della trave è tale da mantenere sempre la trave in contatto con la caviglia. Dal triangolo ABA', abbiamo

$$\frac{\operatorname{sen} \delta\theta}{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)} = \frac{AA'}{A'B}\,;$$

onde $$\delta\theta = \frac{c \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \operatorname{sen} \theta}{b} \text{ ultimamente.}$$

Quindi pel principio delle velocità virtuali

$$W\left\{\frac{ac}{b}\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}(\theta-\alpha)-c\cos\alpha\right\}+Rc\operatorname{sen}\alpha=0\,;$$

cioè,

$$W\left(\frac{a\operatorname{sen}^3\theta}{b}-1\right)c\cos\alpha+\left(R-\frac{Wa}{b}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right)c\operatorname{sen}\alpha=0\,;$$

e $c\cos\alpha$ e $c\operatorname{sen}\alpha$ sono indipendenti; quindi

$$\frac{a\operatorname{sen}^3\theta}{b}-1=0\,,\quad R-\frac{Wa}{b}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta=0\,;$$

onde $$\operatorname{sen}\theta=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,,\quad\text{ed}\quad\frac{R}{W}=\frac{\sqrt{(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})}}{b}.$$

(4) Finalmente, supponiamo che si vogliano determinare P ed R e la posizione di equilibrio.

Allora dobbiamo dare alla trave lo spostamento più generale possibile nel piano delle forze; sia $AA'=c$, e sia α l'angolo che AA' fa con la verticale. Ora si concepisca che la trave sia condotta nella sua seconda posizione con due passi; prima movendosi parallelamente a sè stessa finchè l'estremità inferiore venga in A', e poi girando intorno ad A' per un angolo $\delta\theta$. Lo spostamento di A valutato secondo la linea di azione di R è $c\operatorname{sen}\alpha$. Lo spostamento di G valutato verticalmente in basso è

$$a\,\delta\theta\operatorname{sen}\theta-c\cos\alpha.$$

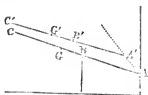
Lo spostamento di R secondo la linea di azione di P è

$$c\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\theta\right)-b\operatorname{cosec}\theta\delta\theta\,,$$

cioè $$c\operatorname{sen}(\theta-\alpha)-b\operatorname{cosec}\theta\delta\theta.$$

Quindi pel principio delle velocità virtuali

$$W(a\delta\theta\operatorname{sen}\theta-c\cos\alpha)+Rc\operatorname{sen}\alpha$$
$$+P\{c\operatorname{sen}(\theta-\alpha)-b\operatorname{cosec}\theta\delta\theta\}=0\,;$$

cioè, $(Wa \operatorname{sen}\theta - Pb \operatorname{cosec}\theta)\delta\theta + (P \operatorname{sen}\theta - W)c \cos\alpha$
$$+ (R - P\cos\theta) c \operatorname{sen}\alpha = 0,$$

e $\delta\theta$, $c\cos\alpha$, e $c\operatorname{sen}\alpha$ sono indipendenti; quindi

$$Wa \operatorname{sen}\theta - Pb \operatorname{cosec}\theta = 0, \quad P\operatorname{sen}\theta - W = 0, \quad R - P\cos\theta = 0.$$

Queste tre equazioni sono le equazioni che avremmo ottenuto con i principii dell'Art. 57; esse danno con l'eliminazione

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \quad \frac{P}{W} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{R}{W} = \frac{\sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

Abbiamo così illustrato il modo di applicazione di questo principio; ed osserviamo in generale, che quando l'oggetto del problema non richiede alcune forze incognite, dobbiamo dare al corpo il movimento geometrico più arbitrario possibile senza dare ai punti di applicazione di queste forze alcun movimento secondo le loro direzioni.

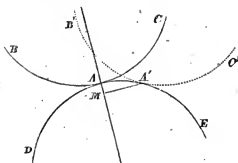
211. Nell'applicare il principio delle velocità virtuali a determinare le condizioni di equilibrio di un sistema, è spesso conveniente di dare al corpo uno spostamento tale che *i momenti virtuali di alcune delle forze svaniscano separatamente.* Questo è stato esemplificato nell'Articolo precedente, ed ora enumereremo alcuni casi in cui il momento virtuale di una forza svanisce.

(1) Nello spostamento ipotetico, se alcuni elementi del sistema rimangono nelle loro posizioni primitive, il momento virtuale delle forze che agiscono su tali punti evidentemente è zero. Se un corpo, per esempio, ha un punto fisso, allora la velocità virtuale di questo punto è zero per ogni spostamento ipotetico del corpo, che soddisfa alla condizione di rimanere fisso questo punto.

(2) Si supponga un corpo costretto a rimanere con un punto a contatto con un piano fisso levigato, sicchè il piano eserciti una forza sul corpo nel punto di contatto nella direzione perpendicolare al piano. Si sposti il corpo in modo da avere sempre lo *stesso* punto a contatto col piano fisso, allora la perpendicolare condotta dalla nuova posizione del punto di contatto sull'antica direzione dell'azione del piano fisso incontra quella direzione nell'antica posizione del punto di contatto, cioè, la velocità virtuale del punto di contatto relativo alla forza esercitata dal piano è zero.

Similmente, se il corpo ha più di un punto a contatto col piano, e si sposta in modo che gli *stessi punti* del corpo rimangano a contatto col piano fisso, il momento virtuale di ciascuna forza che il piano esercita sul corpo svanisce.

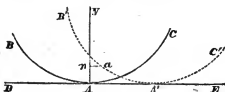
(3) Siano due corpi levigati a contatto; allora ciascuno esercita una forza sull'altro secondo la loro normale comune. Si supponga *uno* di essi spostato in modo, che il suo punto primitivamente a contatto con l'altro corpo rimanga ancora a contatto con esso; il caso è simile a quello di un corpo a contatto con un piano fisso; la velocità virtuale del punto di contatto relativa alla forza normale non è zero, ma è infinitamente piccola rispetto alla velocità virtuale assoluta.

Sia BAC una sezione di uno dei corpi fatta con un piano che

contiene la normale comune alle superficie, e DAE la sezione dell'altro fatta con lo stesso piano; A il punto di contatto. Si supponga il corpo BAC spostato nella posizione $B'A'C'$, sicchè il punto A sia venuto in A'. Si tiri $A'M$ perpendicolare alla normale comune alle superficie. Allora AM rappresenta la velocità virtuale del punto di contatto rispetto alla forza normale, mentre la linea retta che congiunge A ed A' è la velocità virtuale assoluta. Siccome MAA' è ultimamente un angolo retto, AM svanisce in paragone con AA'.

(4) Si suppongano due corpi a contatto in un solo punto, e si spostino *entrambi* in modo che rimangano sempre con lo stesso punto di ciascun corpo a contatto. Dinoti P la forza nella normale su di un corpo, e quindi $-P$ quella sull'altro; allora, se $P\delta p$ dinota il momento virtuale della forza normale rispetto al primo corpo, $-P\delta p$ sarà il momento virtuale rispetto al secondo corpo. Quindi, prendendo la somma dei momenti virtuali per i due corpi, l'azione scambievole P sparisce.

Un simile risultato vale se i corpi sono a contatto in più di un punto.

(5) Si supponga un corpo a contatto con un piano fisso levigato in un solo punto, e si sposti il corpo *rotolando* sul piano fisso.

Sia BAC una sezione del corpo fatta da un piano che passa

pel punto di contatto A e contiene la normale comune alle superficie, e si supponga questa sezione un circolo. Sia DAE l'intersezione di questo piano col piano fisso levigato. Si supponga $B'A'C'$ la posizione del corpo dopo lo spostamento, A' essendo il nuovo punto di contatto, e sia a il punto nel corpo che era primitivamente a contatto col piano fisso levigato. Si tiri an perpendicolare alla normale AN; allora, An rappresenta la velocità virtuale risoluta del punto di contatto rispetto alla forza normale. Ora An è eguale al prodotto della corda $A'a$ pel seno dell'angolo tra questa corda ed $A'A$; e siccome quest'angolo è ultimamente infinitamente piccolo, An è infinitamente piccola in paragone con la corda $A'a$, e quindi anche in paragone con l'arco $A'a$ o AA'. Quindi se trascuriamo le potenze di AA' superiori alla prima, il momento virtuale della forza secondo la normale agente nel punto di contatto è zero.

Un simile risultato vale se BAC, DAE sono curve *qualunque* invece di un circolo e di una linea retta rispettivamente.

Se uno spostamento è composto da due, l'uno come quello nel secondo caso, e l'altro come quello nel caso attuale, il piano fisso essendo levigato, il momento virtuale della forza esercitata dal piano svanirà.

(6) Supponiamo che i corpi a contatto siano *scabri*, e si operi uno spostamento *rotolando* uno di essi sull'altro come nel caso precedente. L'azione di ciascun corpo sull'altro non sarà diretta secondo la normale AN, ma può essere risoluta in due, l'una secondo AN e l'altra ad angoli retti ad AN. Il momento virtuale della prima forza svanisce, come abbiamo mostrato nel caso precedente; e siccome la direzione della linea retta che congiunge

A ed a ultimamente coincide con AN ed è perciò perpendicolare alla seconda forza, il momento virtuale della seconda forza svanisce nello stesso modo come nel terzo caso.

Il risultato dipende dall'ipotesi che i corpi rotolano l'uno sull'altro; se vi è *sdrucciolamento* il momento virtuale della forza ad angoli retti ad AN non svanirà.

(7) Si supponga un filo inestensibile che abbia un estremo legato ad un punto fisso, e l'altro estremo ad un elemento o isolato o formante parte di un corpo rigido; una delle forze del sistema è allora la tensione di questo filo che agisce secondo la sua lunghezza. Si sposti l'elemento in modo da mantenere il filo teso, allora esso può passare dalla prima alla seconda sua posizione movendosi sopra un arco di circolo, e nello stesso modo come nel terzo caso, vediamo che la velocità virtuale dell'elemento rispetto alla tensione esercitata dal filo, è infinitamente piccola in paragone della velocità virtuale assoluta dell'elemento. Quindi, la tensione del filo sparisce dall'equazione delle velocità virtuali.

(8) Si supponga un filo inestensibile che congiunga due elementi del sistema, e si spostino gli elementi secondo la direzione del filo, il filo essendo mantenuto teso. Allora, se un elemento si sposta per uno spazio δp, e P dinota la tensione del filo, e quindi la forza esercitata dal filo sull'elemento, $P\delta p$ è il momento virtuale della forza che il filo esercita su questo elemento; ancora $-P\delta p$ sarà il momento virtuale della forza che il filo esercita sul secondo elemento. Quindi, prendendo la somma dei momenti virtuali per i due elementi, la tensione del filo sparisce dall'equazione delle velocità virtuali.

(9) Se supponiamo un ulteriore spostamento del sistema nel caso precedente, tenendo un elemento fisso e facendo descrivere all'altro un arco di cerchio, allora, pel settimo caso, la tensione del filo sparisce dall'equazione delle velocità virtuali.

Con una combinazione degli spostamenti considerati nel settimo e nell'ottavo caso, possiamo produrre qualunque spostamento al quale i due elementi possono essere assoggettati, finchè il filo è tenuto teso. Quindi, la tensione di un filo che congiunge due elementi sparisce dall'equazione delle velocità virtuali.

Abbiamo supposto che il filo passi in linea retta da un elemento all'altro, ma lo stesso risultato reggerebbe se il filo si piegasse passando per uno o più anelli fissi levigati, supponendo sempre che sia mantenuto teso. La dimostrazione non varrebbe per un filo *estensibile*.

212. Possiamo ora intendere più distintamente il significato delle parole, *senza turbare la connessione scambievole delle parti del sistema*, che s'introdussero nell'enunciato del teorema. Il teorema si è mostrato nell'Art. 205 di essere vero per un elemento; se quindi consideriamo un corpo rigido come una collezione di elementi mantenuti insieme da forze molecolari, il teorema reggerà per *ogni* spostamento degli elementi del corpo rigido, purchè includiamo le forze molecolari e valutiamo i loro diversi momenti virtnali. Ma dalla dimostrazione nell'Art. 208 apparisce che *non* abbiamo bisogno di considerare le forze molecolari, purchè diamo ai diversi elementi solo quei spostamenti che sono conciliabili con l'inalterata rigidità del corpo. Così rispetto alle forze enunciate nell'Articolo precedente, possiamo, se le prendiamo in considerazione, dare al sistema qualunque spostamento ci piace; ma se *non* le prendiamo in considerazione dobbiamo dare solamente spostamenti tali da non introdurre i momenti virtuali di queste forze. Quindi, le parole che abbiamo spiegate eqnivalgono a prescrivere d'includere *ogni* forza del sistema, eccetto quelle per le quali sappiamo che i loro momenti virtuali sono zero per lo spostamento particolare che si considera.

213. L'esempio seguente mostrerà come il principio delle velocità virtuali può giovare nella soluzione dei problemi. Sei verghe eguali sono congiunte insieme con gangheri a ciascun estremo, ed una delle verghe essendo sostenuta in una posizione orizzontale l'opposta è attaccata ad essa con un filo elastico che congiunge i loro punti medii; determinare la tensione di questo filo.

Dinoti W il peso di ciascuna verga, T la tensione del filo. Si supponga il sistema spostato leggermente in modo che la verga più bassa discenda verticalmente per uno spazio x. Allora si vedrà facilmente che il centro di gravità di ciascuna delle due verghe che sono adiacenti alla più alta discende per uno spazio $\frac{x}{4}$; ed il centro di gravità di ciascuna delle due verghe che sono adiacenti alla più bassa discende per uno spazio $\frac{3x}{4}$; il pnnto d'applicazione della tensione sulla verga più bassa discende per uno spazio x. Quindi pel principio delle velocità virtuali

$$2W\frac{x}{4} + 2W\frac{3x}{4} + Wx - Tx = 0\,;$$

quindi
$$T = 3W.$$

Le azioni scambievoli nei gangheri spariscono dall'equazione

fornita dal principio delle velocità virtuali, e così il risultato richiesto è prontamente ottenuto.

214. Ciò che segue è il procedimento col quale possiamo dedurre le equazioni di equilibrio di un sistema qualunque dal principio delle velocità virtuali.

Dinotino $P_1, P_2, P_3, \ldots$ le forze che agiscono sopra un sistema; $P_1\delta p_1$, $P_2\delta p_2, \ldots$ i loro momenti virtuali rispettivi per uno spostamento qualunque; allora, pel principio,

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Questa equazione passiamo a sviluppare.

Siano $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ gli angoli che la direzione di P_1 fa con gli assi coordinati; x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto di applicazione di P_1; allora

$$\delta p_1 = \cos\alpha_1\,\delta x_1 + \cos\beta_1\,\delta y_1 + \cos\gamma_1\,\delta z_1 \quad \ldots\ldots\ (2);$$

questo è rigorosamente vero, e simili equazioni si hanno per δp_2, $\delta p_3, \ldots$

Ora, in conseguenza della connessione del sistema, per esempio, la rigidezza di alcune parti di esso, o la congiunzione delle parti per mezzo di verghe o fili, avranno luogo delle relazioni tra le coordinate x_1, y_1, z_1, $x_2, y_2, z_2, \ldots$ in virtù delle quali esse si potranno esprimere in termini di un certo numero tra loro; o pure tutte si potranno esprimere in termini di certe altre coordinate ed angoli indipendenti.

Supponiamo che $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ dinotino queste coordinate ed angoli indipendenti. Allora, se trascuriamo i quadrati e prodotti, e le potenze superiori di δx_1, $\delta y_1, \ldots$ $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2, \ldots$ $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2, \ldots$, otterremo equazioni della forma

$$\delta x_1 = A_1\delta\xi_1 + A_2\delta\xi_2 + \ldots + a_1\delta\varphi_1 + a_2\delta\varphi_2 + \ldots,$$
$$\delta y_1 = B_1\delta\xi_1 + B_2\delta\xi_2 + \ldots + b_1\delta\varphi_1 + b_2\delta\varphi_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

in cui $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ sono funzioni delle variabili, ma non contengono gl'incrementi $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \ldots \delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \ldots$

Si sostituiscano i valori di $\delta x_1, \delta y_1 \ldots$ nelle equazioni di cui (2) è il tipo, e poi i valori di $\delta p_1, \delta p_2, \ldots$ si sostituiscano in (1); questa equazione prenderà la forma

$$Q_1\delta\xi_1 + Q_2\delta\xi_2 + \ldots + q_1\delta\varphi_1 + q_2\delta\varphi_2 + \ldots = 0 \ \ldots\ (3).$$

Le condizioni per l'equilibrio del sistema sono

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots\ q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \ \ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Infatti poichè $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \ldots \delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \ldots$ sono por ipotesi indipondenti, potremmo dare al corpo un tale spostamento da lasciare $\xi_2, \xi_3, \ldots \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ invariate; ed allora (3) si ridurrebbe a

$$Q_1 \delta\xi_1 = 0\ ; \quad \text{onde} \quad Q_1 = 0.$$

Similmente, possiamo mostrare che hanno luogo le altre equazioni (4).

215. Daremo un esempio semplice per illustrare il metodo dell'Articolo precedente. Un filo di data lunghezza ha un estremo fisso in un punto della linea d'intersezione di due piani verticali ad angoli retti tra loro, ed all'altro estremo porta un elemento pesante che è respinto da questi piani con forze di cui una è costante e l'altra varia come la distanza dal piano; trovare le posizioni di equilibrio.

Si prenda il piano verticale dal quale l'elemento è respinto con una forza costante per piano delle (x,z), o l'altro piano verticale per piano delle (y,z); si prenda per origine il punto al quale è fisso l'estremo del filo, e l'asse delle z sia diretto verticalmente in basso. Dinotino x, y, z le coordinate dell'elemento in una posizione di equilibrio, ed l la lunghezza del filo. Sia W il peso dell'elemento, F la forza costante ripulsiva, μx la forza che varia come la distanza dell'elemento dal piano delle (y,z). Si concepisca l'elemento spostato in una posizione adiaconte, le coordinate della quale sono $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$. Allora pel principio delle velocità virtuali

$$\mu x\,\delta x + F\delta y + W\delta z = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1);$$

la tensione del filo non ha alcun momento virtuale per l'Art. 211.

Inoltre $$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2);$$

onde $$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Da (3) possiamo esprimere δz in termini di δx e δy; così (1) diviene

$$\left(\mu x - \frac{Wx}{z}\right)\delta x + \left(F - \frac{Wy}{z}\right)\delta y = 0.$$

Quindi $$\mu x - \frac{Wx}{z} = 0, \quad \text{ed} \quad F - \frac{Wy}{z} = 0.$$

Dalla prima di queste equazioni otteniamo o $z = \dfrac{W}{\mu}$, o pure $x=0$.

Se prendiamo la prima soluziono otteniamo $y = \dfrac{F}{\mu}$, od allora x

è conosciuto da (2); così si determina una posizione di equilibrio. Se prendiamo la soluzione $x=0$, allora y e z si debbono trovare dalle equazioni

$$Fz - Wy = 0, \quad y^2 + z^2 = l^2;$$

così si determina un'altra posizione di equilibrio.

216. Il principio delle velocità virtuali è utile nella Statica per la soluzione di problemi come quello nell'Art. 210, in cui s'incontrano forze che hanno i loro momenti virtuali zero per alcuni spostamenti. Ciò che segue è un'importante proposizione generale alla quale il principio conduce. *Un sistema di corpi rigidi non sollecitato da altre forze fuorchè i loro pesi, le pressioni scambievoli, e le pressioni sopra superficie immobili levigate, sarà in equilibrio, se è situato in modo che il centro di gravità sia nella posizione più bassa o più alta che esso può raggiungere movendo il sistema in modo conciliabile con la connessione scambievole delle sue parti.*

Dinotino $z_1, z_2, \ldots$ le distanze al di sotto di un piano orizzontale fisso dei diversi elementi del sistema; $w_1, w_2, \ldots$ i pesi di questi elementi. Affinchè il sistema sia in equilibrio, dobbiamo avere

$$w_1 \delta z_1 + w_2 \delta z_2 + w_3 \delta z_3 + \ldots = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

poichè per l'Art. 211 i momenti virtuali di tutte le altre forze che agiscono sul sistema svaniscono. Dinoti z' la profondità del centro di gravità del sistema al di sotto del piano orizzontale fisso; allora

$$z' = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3 + \ldots}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots};$$

quindi $$(w_1 + w_2 + w_3 + \ldots)\delta z' = w_1 \delta z_1 + w_2 \delta z_2 + w_3 \delta z_3 + \ldots\ldots (2).$$

Ora quando z' ha un valore massimo o minimo,

$$\delta z' = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

pel Calcolo Differenziale.

Quindi, quando il centro di gravità è ad una distanza massima o minima dal piano orizzontale fisso, (1) è soddisfatta ed il sistema è in equilibrio.

L'equazione (3) è una condizione *necessaria* ma non *sufficiente* perchè z' abbia un valore massimo o minimo; quindi, non possiamo asserire viceversa, che quando il sistema è in equilibrio, il centro di gravità debba essere ad una profondità massima o minima.

Se il sistema dei corpi rigidi è tale che il centro di gravità sia sempre nello stesso piano orizzontale, ogni posizione è una posizione di equilibrio. Poichè in questo caso z' è costante, e quindi $\delta z'$ sempre $=0$.

217. Supponiamo un sistema in equilibrio, e che si dia ad esso uno spostamento infinitamente piccolo; allora se esso tende a ritornare alla sua posizione primitiva, quella posizione si dice essere una di *equilibrio stabile*; se il sistema tende ad allontanarsi maggiormente dalla sua posizione primitiva, quella posizione si dice essere una di *equilibrio instabile*.

Il determinare in ogni caso se l'equilibrio di un sistema è *stabile* o *instabile*, è una quistione di dinamica nella quale non entriamo. Il lettore può consultare Poisson, Art. 570, o Duhamel, Tom. II, Art. 69; la migliore discussione del problema, però, si troverà nel *Cours Complémentaire d'Analyse et de Mécanique Rationelle, par* J. Wieille, Paris 1851.

Il teorema generale seguente è dimostrato. Si suppongano le forze che agiscono sopra un sistema tali che

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz)$$

sia il differenziale immediato di una funzione delle coordinate, φ; allora, per ogni posizione di equilibrio, φ è in generale, un *massimo* o un *minimo*, nel primo caso l'equilibrio è *stabile* e nel secondo *instabile*.

Un caso particolare importante è quello del sistema nell'Art. 216, nel quale l'equilibrio è *stabile* quando il centro di gravità ha la sua posizione più *bassa*, ed *instabile* quando esso ha la sua posizione più *alta*.

218. Illustreremo ora il principio contenuto nell'Articolo precedente applicandolo a due esempii.

I. Una trave pesante uniforme è situata con le sue estremità a contatto con una curva fissa verticale levigata, in forma di un ellisse con le sue direttrici orizzontali: determinare la posizione di equilibrio stabile, la lunghezza della trave essendo supposta non minore del lato retto.

Dinotino P e Q le estremità della trave; siano PM e QN perpendicolari sulla direttrice inferiore, ed S il fuoco corrispondente a questa direttrice. Allora l'altezza del centro di gravità della trave su questa direttrice è $\frac{1}{2}(PM+QN)$; per l'equilibrio

stabile quest'altezza dovrebbe essere un minimo. Se e è l'eccentricità dell'ellisse abbiamo

$$PM + QN = \frac{1}{e}(SP + SQ);$$

e quindi $SP+SQ$ deve essere un minimo. Ma $SP+SQ$ è sempre maggiore di PQ, eccetto quando S è nella linea retta PQ. Quindi la posizione di equilibrio stabile è quella in cui PQ passa pel fuoco.

Poichè la trave è in equilibrio sotto l'azione del suo proprio peso e delle resistenze normali della curva, ne segue che la linea retta che congiunge il punto d'intersezione delle normali nelle estremità di una corda focale di un'ellisse col punto medio della corda è parallela all'asse maggiore: questo risultato si può verificare geometricamente.

II. Il principio dell'Art. 217 si può applicare ad un liquido il quale si può riguardare come una collezione di elementi pesanti levigati infinitamente piccoli.

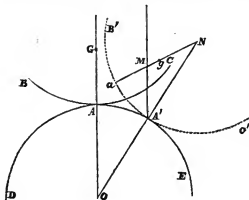
Si supponga una serie di rettangoli, tutti della stessa lunghezza, ma con larghezze qualunque. Siano essi connessi lungo le loro lunghezze da gangheri levigati, in modo da formare un prisma vuoto senza basi; e si ponga il sistema verticalmente sopra un piano orizzontale levigato. Si versi del liquido nel vaso così formato. Nella posizione di equilibrio stabile il centro di gravità del liquido sarà ad un'altezza minima sopra il piano orizzontale; e quindi l'area di una sezione orizzontale del prisma avrà allora un valore massimo.

Ma per i principii dell'Idrostatica i rettangoli che formano le facce verticali del vaso sono sollecitati dalle pressioni del fluido le quali formano un sistema di forze come quello nella Prop. II, in fine del Cap. IV.: e quindi quando vi è equilibrio la sezione orizzontale del prisma deve formare un poligono inscrittibile in un cerchio.

Quindi abbiamo il seguente risultato: se un'area deve essere limitata da linee rette date l'area è massima quando le linee rette sono tutte corde di un circolo. Si consulti il Calcolo differenziale.

219. Ciò che segue è un esempio semplice del distinguere la natura dell'equilibrio.

Un corpo pesante poggia sopra un corpo fisso, determinare la natura dell'equilibrio; le superficie essendo supposte scabre.

Sia BAC una sezione verticale del corpo superiore fatta da un

piano condotto pel suo centro di gravità G, e DAE la sezione del corpo inferiore fatta dallo stesso piano. Supponiamo queste sezioni tutte e due circolari; sia r il raggio della sezione superiore ed R quello dell'inferiore. Sia il corpo superiore spostato nella posizione $B'A'C'$, e si supponga a quel punto nel corpo superiore che era primitivamente in A; in A' il nuovo punto di contatto si tiri la normale comune $OA'N$, che incontri in O il raggio AO della superficie inferiore, ed in N il raggio aN della superficie superiore. Si tiri la linea verticale per N che incontri aN in N; sia g la nuova posizione del centro di gravità del corpo superiore. Se supponiamo le superficie abbastanza scabre da impedire ogni sdrucciolamento, il corpo superiore girerà intorno ad A', e l'equilibrio sarà *instabile* se g cade più di M lontano da a, e *stabile* se g cade tra M ed a.

Sia $$AOA' = \theta, \quad aNA' = \varphi.$$

Siccome supponiamo il corpo superiore spostato *rotolando* sull'inferiore, abbiamo
$$\text{arco}\, AA' = \text{arco}\, aA'.$$
quindi $$R\theta = r\varphi.$$

Inoltre $$\frac{MN}{MA'} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,(\theta+\varphi)} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\left(1+\frac{R}{r}\right)\theta}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{R}{r}} \text{ ultimamente};$$

quindi $$MN = \frac{r^2}{r+R},$$

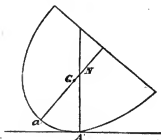
ed $$aM = r - \frac{r^2}{r+R} = \frac{Rr}{R+r}.$$

Quindi, l'equilibrio è stabile o instabile secondo che ag, o AG, è minore o maggiore di $\frac{Rr}{R+r}$.

Se la superficie inferiore è *concava* invece di *convessa*, si può mostrare nello stesso modo che l'equilibrio è stabile o instabile secondo che AG è minore o maggiore di $\frac{Rr}{R-r}$.

I risultati di questo Articolo reggeranno quando le sezioni BAC e DAE non sono circoli; r ed R staranno allora per i raggi di curvatura delle sezioni, superiore ed inferiore, nel punto A. Se la superficie inferiore è piana, R è infinito, e per l'equilibrio stabile AG deve essere minore di r.

220. Se $AG = \frac{Rr}{R+r}$ nel primo caso, o $= \frac{Rr}{R-r}$ nel secondo caso, l'equilibrio è stato chiamato *neutro*. In questo caso, dovrà farsi un'ulteriore investigazione per determinare se l'equilibrio è stabile o instabile. Supponiamo, per esempio, che una porzione di paraboloide stia in equilibrio neutro col suo vertice a contatto con un piano orizzontale, si voglia determinare se l'equilibrio è stabile o instabile.

Poichè l'equilibrio è neutro, il centro di gravità G deve coincidere col centro di curvatura della parabola generatrice nel vertice; ora, se si prendono diversi punti in una parabola, quanto più lontano dal vertice è il punto preso, tanto più lontano dal vertice è il punto d'intersezione della normale e dell'asse. Quindi, la normale $A'N$ nella figura incontra l'asse della parabola più di G lontano da a, e l'equilibrio è *stabile*.

È facile mostrare generalmente, che se una porzione di un solido di rotazione poggia in equilibrio neutro col suo vertice sopra un piano orizzontale, l'equilibrio è realmente *stabile* o *in-*

stabile, secondo che il raggio di curvatura della curva generatrice ha un valore *minimo* o *massimo* al vertice.

221. I risultati dell' Art. 219, quando le sezioni BAC e DAE sono circoli, si possono anche ottenere adoperando il teorema citato nell' Art. 217.

Dinoti z l' altezza del centro di gravità g sulla linea orizzontale per O, e sia $Ng=c$; allora

$$z = (R+r)\cos\theta - c\cos(\theta+\varphi)$$
$$= (R+r)\cos\theta - c\cos\left(1+\frac{R}{r}\right)\theta.$$

Si sviluppino i coseni secondo le potenze degli angoli; così

$$z = R + r - c + \left\{c\left(1+\frac{R}{r}\right)^2 - (R+r)\right\}\frac{\theta^2}{2}$$
$$-\left\{c\left(1+\frac{R}{r}\right)^4 - (R+r)\right\}\frac{\theta^4}{\underline{|4}} + \ldots$$

Supponiamo che il coefficiente di θ^2 non sia zero; allora quando θ è infinitamente piccolo z è maggiore o minore di $R+r-c$, secondo che il coefficiente di θ^2 è positivo o negativo; nel primo caso $R+r-c$ è un valore *minimo* di z, e nel secondo caso esso è un valore *massimo*. Quindi l' equilibrio è stabile se c è maggiore di $\frac{r^2}{R+r}$, ed instabile se c è minore di $\frac{r^2}{R+r}$.

Supponiamo però che sia $c = \frac{r^2}{R+r}$, allora il coefficiente di θ^2 è zero; in questo caso si dice che l' equilibrio è *neutro*. Dobbiamo ora esaminare il coefficiente di θ^4 nel valore di z; questo coefficiente è

$$-\frac{1}{\underline{|4}}\left\{c\left(1+\frac{R}{r}\right)^4 - (R+r)\right\},$$

cioè,
$$-\frac{1}{\underline{|4}}\left\{\frac{(R+r)^3}{r^2} - (R+r)\right\},$$

cioè,
$$-\frac{R(R+r)(R+2r)}{r^2\,\underline{|4}};$$

siccome questa è una quantità *negativa* ne segue che $R+r-c$ è un valore massimo di z e l' equilibrio è realmente *instabile*.

222. Il problema seguente fornirà un esempio instruttivo. Una cornice formata da quattro verghe uniformi di lunghezza a

connesse per mezzo di gangheri levigati, è sospesa sopra due caviglie levigate nella stessa linea orizzontale ad una distanza $\frac{a}{\sqrt{2}}$, le due caviglie essendo in contatto con verghe diverse; mostrare che la cornice è in equilibrio quando ciascun angolo è 90°, e determinare se l'equilibrio è stabile o instabile.

Si dinotino le caviglie con A e B; supponiamo che la verga a contatto con A faccia un angolo θ con l'orizzonte, e la verga a contatto con B faccia un angolo φ con l'orizzonte; dinoti u la profondità del centro di gravità del sistema al di sotto di AB. Allora si può mostrare che

$$u = \frac{a}{2}(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi) - \frac{c \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\theta+\varphi)},$$

in cui

$$c = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Così u è una funzione delle due variabili indipendenti θ e φ, ed affinchè u abbia un valore massimo o minimo θ e φ debbono essere presi in modo da soddisfare $\frac{du}{d\theta} = 0$ e $\frac{du}{d\varphi} = 0$. Si troverà con la sostituzione che $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$ sono valori convenevoli. Ma si troverà che con questi valori di θ e φ abbiamo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{c}{2}, \quad \frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi} = -c, \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{c}{2};$$

sicchè $\left(\frac{d^2u}{d\theta\, d\varphi}\right)^2 - \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ è *positivo* ed u non è *nè un massimo nè un minimo* quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Tutto ciò che precede è un semplice esempio del Calcolo differenziale; passiamo ad applicarlo al Problema meccanico in quistione.

Dinoti δu la variazione di u in conseguenza del cangiamento del valore di θ da $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}+\delta\theta$, e del valore di φ da $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}+\delta\varphi$; allora segue dalle investigazioni precedenti che

$$\delta u = -\frac{c}{4}\left\{(\delta\theta)^2 + 4\delta\theta\,\delta\varphi + (\delta\varphi)^2\right\} + \text{etc.},$$

dove nell'etc. sono inclusi termini in $\delta\theta$ e $\delta\varphi$ di ordine superiore

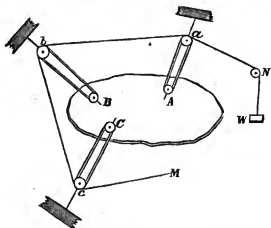
al secondo. Ora benchè u non sia nè un massimo nè un minimo quando θ e φ sono ciascuno $\frac{\pi}{4}$, pure vi è equilibrio allora poichè δu è allora zero sino ai termini di primo ordine in $\delta\theta$ e $\delta\varphi$. (Si vegga l'Art. 216). Ma siccome u non è *nè* un massimo *nè* un minimo l'equilibrio non può dirsi stabile o instabile *universalmente*; esso è infatti *stabile* rispetto ad *alcuni* spostamenti ed *instabile* rispetto ad *altri* spostamenti. Se per esempio, consideriamo solamente spostamenti tali da rendere $\delta\theta=\delta\varphi$, allora δu è certamente *negativa* quando $\delta\theta$ e $\delta\varphi$ si prendono abbastanza piccoli; così il centro di gravità è *elevato* con lo spostamento e l'equilibrio è *stabile*. Se, inoltre, consideriamo solamente spostamenti tali da rendere $\delta\theta=-\delta\varphi$, allora δu è certamente *positiva* quando $\delta\theta$ e $\delta\varphi$ si prendono abbastanza piccoli; così il centro di gravità è *depresso* con lo spostamento e l'equilibrio è *instabile*.

223. *Di tutte le curve di data lunghezza condotte per due punti fissi in una linea orizzontale, la catenaria ordinaria è quella che ha il suo centro di gravità più lontano dalla linea retta che congiunge i punti.*

Questa proposizione appartiene al *Calcolo delle Variazioni*, ma una dimostrazione imperfetta di essa si può ottenere per mezzo di alcuni dei principii precedenti. Poichè il filo che pende secondo una catenaria ordinaria è in equilibrio ne conchiudiamo che la profondità del suo centro di gravità dalla linea orizzontale è un massimo o un minimo. (Si vegga però l'Art. 216). E possiamo inferire che la profondità è un *massimo* e non un *minimo* dal fatto sperimentale che se il filo è leggermente spostato esso ritornerà alla sua posizione di equilibrio sicchè il suo equilibrio è *stabile*. (Si vegga l'Art. 217). Quindi in ogni altra posizione del filo diversa da quella di equilibrio il centro di gravità sarà più vicino alla data linea orizzontale. E siccome il filo che pende secondo la catenaria comune è di densità e spessezza uniforme il suo centro di gravità coincide con quello della curva. Così la proposizione è stabilita.

224. Lagrange ha dato una dimostrazione del principio delle velocità virtuali, che non suppone la conoscenza delle condizioni di equilibrio di alcun sistema di forze; questa dimostrazione è difficile e non è stata accettata universalmente. La porremo qui e rimandiamo il lettore a *Poisson*, Art. 337, ed all'articolo « Velocità virtuali » nella *Penny Cyclopoedia*, per ulteriore informazione.

Dobbiamo prima mostrare come un sistema qualunque di forze si può rimpiazzare con un filo in uno stato di tensione che passa intorno ad una combinazione di carrucole.

Le forze P, Q, R, ... agenti nei punti A, B, C, ... mantengano

un sistema in equilibrio; delle carrucole siano fissate al sistema nei punti A, B, C, ... e delle carrucole a, b, c, ... siano attaccate a tronchi fissi, sicchè Aa sia la direzione della forza P, Bb quella di Q, e così di seguito. Un filo abbia un peso W legato in un estremo, e passi intorno ad una carrucola N e poi intorno alle carrucole a ed A un sufficiente numero di volte in modo da rendere la somma delle tensioni eguale a P. Lo stesso filo passi in seguito sulla carrucola b, e giri intorno a b e B un sufficiente numero di volte, finchè la somma delle tensioni sia eguale a Q. Il filo passa poscia su c ed intorno a c e C, e così di seguito; l'estremo del filo è legato ad un punto fisso M. Così il sistema delle forze P, Q, R, ... si può rimpiazzare con un solo filo, la tensione del quale è W. Qui supponiamo che le forze P,Q,R, ... siano commensurabili.

Passiamo ora alla dimostrazione, nella quale seguiamo molto da vicino le parole di Lagrange.

È chiaro, affinchè il sistema rimanga in equilibrio, che il peso W deve essere incapace di discendere quando si dà ai punti del sistema uno spostamento qualunque infinitamente piccolo; infatti poichè il peso tende sempre a discendere, se vi fosse uno spostamento del sistema che gli permettesse di discendere, esso necessariamente discenderebbe e produrrebbe questo spostamento del sistema.

Dinotino $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gli spazii infinitamente piccoli, che uno spostamento qualunque farebbe descrivere ai punti del sistema secondo la direzione delle forze, che rispettivamente agiscono su di essi, e dinotino $p, q, r, \ldots$ i numeri di fili paralleli che sono attaccati alle carrucole $A, B, C, \ldots$ È chiaro che gli spazii $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono quelli per i quali le carrucole $A, B, C, \ldots$ si avvicineranno ad a, b, c, e che il filo che congiunge queste carrucole sarà così diminuito di $p\alpha, q\beta, r\gamma, \ldots$ Così, in conseguenza della inestensibilità del filo, il peso W discenderebbe per lo spazio $p\alpha+q\beta+r\gamma+\ldots$ Quindi, affinchè il sistema delle forze $P, Q, R, \ldots$ sia in equilibrio, dobbiamo avere

$$p\alpha + q\beta + r\gamma + \ldots = 0\,;$$

e quindi, essendo $P = pW,\ Q = qW, \ldots$

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = 0.$$

Questa equazione è l'espressione analitica del principio delle velocità virtuali.

Se la quantità $P\alpha+Q\beta+R\gamma+\ldots$, invece di essere zero, fosse negativa, potrebbe sembrare questa condizione sufficiente per assicurare l'equilibrio, poichè è impossibile che il peso *salga* da sè stesso. Ma dobbiamo rammentare, che qualunque sia la connessione delle parti del sistema, le relazioni che per conseguenza hanno luogo tra le quantità infinitamente piccole $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ si possono esprimere solamente con equazioni differenziali, le quali sono perciò *lineari* rispetto a queste quantità; sicchè vi saranno necessariamente una o più di esse che rimangono indeterminate e si possono prendere con un segno positivo o negativo; così i valori di queste quantità saranno sempre tali da poter cambiare simultaneamente il loro segno. Quindi, ne segue che se per un certo spostamento del sistema, la quantità $P\alpha+Q\beta+R\gamma+\ldots$ è negativa, essa diverrebbe positiva cambiando i segni di $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; così lo spostamento opposto è egualmente possibile, e questo farebbe discendere il peso e distruggerebbe l'equilibrio.

Viceversa, se l'equazione

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = 0$$

vale per ogni possibile spostamento infinitamente piccolo del sistema, esso resterà in equilibrio. Infatti, il peso restando immobile durante questi spostamenti, le forze che agiscono sul sistema rimangono nella stessa condizione, e non vi è alcuna ragione per la quale esse dovessero produrre l'uno, piuttosto che l'altro, dei due spostamenti, per i quali $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ hanno segni diversi.

Questo è il caso di una bilancia che rimane in equilibrio, poichè non vi è alcuna ragione, per la quale essa dovesse inclinarsi da una parte piuttosto che dall'altra.

Il principio delle velocità virtuali essendo così dimostrato per le forze commensurabili, reggerà ancora quando le forze sono incommensurabili; infatti sappiamo che ogni proposizione che si può dimostrare per le quantità commensurabili si può estendere con una *riduzione all'assurdo* alle quantità incommensurabili.

ESEMPII.

1. Un cono di cui il semi-angolo al vertice è $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ è racchiuso nella superficie sferica circoscritta; mostrare che starà in equilibrio in ogni posizione.

2. Una verga uniforme pesante di lunghezza a si muove in un piano verticale intorno ad un ganghero in una estremità. Un filo legato all'altra, passa sopra una carrucola in linea verticale al di sopra del ganghero, ed è attaccato ad un peso eguale alla metà di quello della verga, il quale poggia sopra una curva. La lunghezza del filo e l'altezza della carrucola al di sopra del ganghero sono eguali alla lunghezza della verga, ed il sistema è in equilibrio in tutte le posizioni. Mostrare che l'equazione della curva è

$$r = 4a \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta ,$$

la carrucola essendo l'origine ed il raggio principale essendo verticale.

3. Due verghe ciascuna di lunghezza $2a$ hanno i loro estremi uniti sotto un angolo α, e sono situati in un piano verticale sopra una sfera di raggio r. Dimostrare che l'equilibrio è stabile o instabile secondo che

$$\operatorname{sen}\alpha \text{ è } > \text{ o } < \frac{2r}{a}.$$

4. Uno sferoide allungato poggia col suo più piccolo estremo sopra una tavola orizzontale. È l'equilibrio stabile o instabile?

5. Un cilindro poggia col centro della sua base in contatto col punto più alto di una sfera, e quattro volte l'altezza del cilindro è eguale ad un circolo massimo della sfera; supponendo che le superficie a contatto siano scabre abbastanza da impedire lo sdrucciolamento, mostrare che si può far caracollare il cilindro per un angolo di 90°, e non davvantaggio, senza cadere dalla sfera.

6. Una sbarra molto piccola di materia è mobile intorno ad una estremità la quale è fissa a mezza strada fra due centri di forza che attraggono inversamente come il quadrato della distanza; se l è la lunghezza della sbarra, e $2a$ la distanza tra i centri di forza, dimostrare che vi saranno due posizioni di equilibrio per la sbarra, o quattro, secondo che il rapporto dell'intensità assoluta della forza più energica a quella della meno energica, è, o pur no, maggiore di $\frac{a+2l}{a-2l}$, e distinguere tra la posizione stabile e l'instabile.

7. Due elementi congiunti da un filo si sostengono scambievolmente sull'arco di un circolo verticale; mostrare che il centro di gravità è nella verticale condotta pel centro del circolo. Quale è la natura dell'equilibrio?

8. Una sfera di raggio a, caricata in modo che il centro di gravità sia ad una data distanza b dal centro di figura, è posta sopra un piano scabro inclinato all'orizzonte sotto un angolo α. Mostrare che vi saranno due posizioni di equilibrio, una stabile e l'altra instabile, nelle quali le distanze del punto di contatto dal centro di gravità sono rispettivamente,

$$a \cos \alpha - \sqrt{(b^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)} \,,$$

ed

$$a \cos \alpha + \sqrt{(b^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)}.$$

Quindi, trovare la massima inclinazione del piano che permetterà alla sfera di stare in equilibrio. È l'equilibrio stabile o instabile in questo caso limite?

9. Una sfera di raggio r poggia sopra una sfera concava di raggio R; se la sfera è caricata in modo che l'altezza del suo centro di gravità sul punto di contatto sia $\frac{3}{2}r$, trovare R in modo che l'equilibrio sia neutro.

Risultato. $R = 3r$.

10. Un cono pesante poggia col centro della sua base sul vertice di un paraboloide di rotazione fisso; mostrare che l'equilibrio sarà neutro se l'altezza del cono è eguale a due volte il lato retto della parabola generatrice. Mostrare che l'equilibrio è in realtà stabile.

11. Una tavola quadrata uniforme è capace di movimento in un piano verticale intorno ad un ganghero in uno dei suoi vertici; un filo attaccato ad uno dei vertici più vicini, e che passa su di una carrucola verticalmente al di sopra del ganghero ad una

distanza da esso eguale al lato del quadrato, sostiene un peso di cui il rapporto al peso della tavola è quello di 1 a $\sqrt{2}$. Trovare le posizioni di equilibrio e determinare se esse sono rispettivamente stabili o instabili.

12. Due piccoli anelli levigati dello stesso peso scorrono su di un filo metallico ellittico fisso di cui l'asse maggiore è verticale, e sono congiunti da un filo che passa sopra una caviglia levigata nel fuoco superiore; dimostrare che gli anelli staranno in equilibrio in qualunque posizione siano situati.

13. Un piccolo anello pesante scorre su di un filo metallico levigato in forma di una curva il di cui piano è verticale, ed è congiunto per mezzo di un filo che passa sopra una carrucola fissa nel piano della curva con un altro peso che pende liberamente; trovare la forma della curva affinchè l'anello sia in equilibrio in ogni posizione.

Risultato. Una sezione conica che ha il suo fuoco nella carrucola.

14. Se una tavola ellittica è situata, in modo che il suo piano sia verticale, su due caviglie che sono nello stesso piano orizzontale, vi sarà equilibrio se queste caviglie sono alle estremità di una coppia di diametri coniugati. Quali sono i limiti che la distanza tra le caviglie non deve eccedere o raggiungere, affinchè questa posizione di equilibrio sia possibile? Mostrare che l'equilibrio è *instabile*.

15. Un solido di rotazione, il di cui centro di gravità coincide col centro di curvatura nel vertice, poggia sopra un piano orizzontale scabro. Mostrare che l'equilibrio è stabile o instabile secondo che il valore di $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - \frac{d^4y}{dx^4}$, quando x ed y svaniscono è positivo o negativo, x ed y essendo le coordinate della curva generatrice, valutate secondo la tangente e la normale nel vertice.

16. Se un piano passa per una estremità A della base di un cilindro ed è inclinato sotto un angolo di 45° all'asse, il segmento così staccato resterà in equilibrio neutro, se si pone col suo estremo circolare sul vertice di un paraboloide di cui il lato retto è i cinque ottavi del diametro della base, il punto di contatto essendo anche a questa stessa distanza da A.

17. Una porzione di filo è legata con le sue estremità a due punti fissi; determinare con considerazioni meccaniche la forma che deve prendere il filo affinchè la superficie generata dalla sua rotazione intorno alla linea retta che congiunge i punti fissi sia la massima possibile.

ESEMPII DIVERSI.

1. Un filo metallico uniforme è piegato nella forma dei tre lati AB, BC, CD di un poligono equilatero; ed il suo centro di gravità è nell'intersezione di AC e BD. Mostrare che il poligono deve essere un esagono regolare.

2. Tre forze agiscono secondo tre linee rette che possono considerarsi come generatrici dello stesso sistema di un iperboloide ad una falda; dimostrare che se le forze ammettono una sola risultante, essa deve agire secondo un'altra generatrice dello stesso sistema.

3. Si suppongano tirate delle linee rette da uno dei centri dei quattro circoli che toccano i lati o i lati prolungati di un dato triangolo agli altri tre centri, e queste linee rette rappresentino tre forze in grandezza e direzione; allora la linea retta che congiunge il primo centro col centro del circolo circoscritto al triangolo rappresenterà in grandezza e direzione un quarto della risultante.

4. Un elemento sta in equilibrio in una sottile scannellatura in forma di un'elica, l'asse della quale è inclinato all'orizzonte sotto un dato angolo α. Trovare la distanza dell'elemento da un piano verticale che passa per l'asse. Trovare inoltre il massimo valore di α per una data elica affinchè vi sia una posizione di equilibrio dell'elemento.

5. Una figura quadrilatera possiede la seguente proprietà; preso ad arbitrio un punto e formati quattro triangoli congiungendo questo punto con i vertici della figura, i centri di gravità di questi triangoli stanno sulla circonferenza di un cerchio; dimostrare che le diagonali del quadrilatero sono ad angoli retti tra loro.

6. Una tavola quadrata è sostenuta in una posizione orizzontale da tre fili verticali; se uno di essi è attaccato ad un angolo, dove debbono essere attaccati gli altri affinchè il peso che si può situare in un luogo qualunque della tavola senza rovesciarla sia il più grande possibile?

7. Una lamina triangolare pende da tre fili paralleli attaccati agli angoli, e sostiene un elemento pesante. Dimostrare che se i fili sono di eguale forza, un elemento più pesante può essere sostenuto al centro di gravità che in ogni altro punto del disco.

8. ABC è un triangolo; D, E, F sono i punti medii dei lati opposti ad A, B, C rispettivamente; P è un punto qualunque;

PD, PE, PF sono divisi in un dato rapporto in A', B', C' rispettivamente: mostrare per la teoria del centro di gravità che AA', BB', e CC' s'incontrano in un punto.

9. Un cono retto è tagliato obbliquamente e poi è situato con la sua sezione sopra un piano orizzontale; dimostrare che quando l'angolo del cono è minore di $\text{sen}^{-1}\frac{1}{4}$, vi saranno due sezioni per le quali l'equilibrio è neutro, e per le sezioni intermedie il cono non si reggerà.

10. Un cilindro retto sopra una base ellittica (i semiassi della quale sono a e b) posa col suo asse orizzontale tra due piani inclinati levigati ad angoli retti tra loro; determinare le posizioni di equilibrio, (1) quando l'inclinazione di uno dei piani è maggiore di $\tan^{-1}\frac{a}{b}$, (2) quando l'inclinazione di tutti e due i piani è minore di $\tan^{-1}\frac{a}{b}$.

11. Un mazzo di carte è messo sopra una tavola; ciascuna sporge nella direzione della lunghezza del mazzo su quella che le è sottoposta; se ciascuna sporge per quanto è possibile, dimostrare che le distanze tra le estremità delle successive carte formerà una progressione armonica.

12. Trovare la minima eccentricità di un'ellisse affinchè essa sia capace di restare in equilibrio sopra un piano inclinato perfettamente scabro.

Risultato. $e^2 = \frac{2\,\text{sen}\,\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$.

13. Due elementi che si respingono scambievolmente sono messi in una scannellatura parabolica, e congiunti con un filo che passa per un piccolo anello al fuoco; mostrare che se gli elementi sono in equilibrio, o le loro ascisse sono eguali, o le due parti del filo formano una linea retta.

14. Ciascun elemento di un arco parabolico limitato dal vertice e dal lato retto è sollecitato da una forza secondo la normale proporzionale alla distanza dell'elemento dall'asse della parabola. Mostrare che l'equazione della linea retta nelle quale agisce la risultante è

$$15y + 10x = 26a.$$

15. Ciascun elemento dell'arco di un quadrante ellittico è sollecitato da una forza secondo la normale proporzionale all'ordi-

nata di quel punto. Mostrare che l'equazione della linea retta nella quale agisce la risultante è

$$6by - 3\pi ax + 4a^2 - 4b^2 = 0.$$

16. Un corpo levigato in forma di una sfera è diviso in emisferi e situato col piano di divisione verticale sopra un piano orizzontale levigato; un filo gravato alle sue estremità con due pesi eguali pende sulla sfera, passando pel suo punto più alto e tagliando il piano di divisione ad angoli retti; trovare il minimo peso che conserverà l'equilibrio.

17. Il luogo del centro di gravità di segmenti di eguale area A in un'ellisse è un'ellisse simile concentrica di cui l'asse minore è

$$\frac{4}{3}\frac{ab^2}{A}\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{2}, \text{ dove } A = \frac{ab}{2}(\varphi - \operatorname{sen}\varphi).$$

18. Un disco circolare di massa m' e di raggio c posa in contatto con due verghe rettilinee uniformi eguali AB, AC, le quali sono congiunte in A con un ganghero levigato, ed attraggono sè stesse ed il disco con una forza che varia come la distanza; ancora il disco attrae le verghe similmente. Mostrare che vi è equilibrio se

$$m'c\,(2c\cos\alpha - a\operatorname{sen}\alpha) = ma^2\operatorname{sen}^4\alpha\cos\alpha,$$

dove m è la massa di ciascuna verga, a la lunghezza di ciascuna verga, e 2α la loro scambievole inclinazione.

19. Un quadro quadrato è sospeso in un piano verticale ad un filo, il quale passando sopra un chiodo levigato ha i suoi estremi legati a due punti simmetricamente situati in un lato della cornice. Determinare le posizioni di equilibrio, e se esse sono stabili o instabili.

Risultati. Sia l la lunghezza del filo, c la distanza dei due punti ai quali sono legati gli estremi del filo, h la lunghezza di un lato del quadrato; allora se lh è maggiore di $c\sqrt{(c^2+h^2)}$ vi è solamente una posizione di equilibrio, cioè, la posizione ordinaria, e l'equilibrio è *stabile*; se lh è minore di $c\sqrt{(c^2+h^2)}$ vi sono due posizioni oblique di equilibrio *stabile*, oltre la posizione ordinaria di equilibrio, la quale è *stabile* rispetto ad alcuni spostamenti ed *instabile* rispetto ad altri spostamenti.

20. Un filo flessibile è situato in un tubo di forma qualunque ed è sollecitato da forze qualunque. Il diametro del tubo è eguale a quello del filo ed è infinitesimo. Determinare la posizione di equilibrio.

21. Due elementi eguali sono congiunti da due dati fili senza peso, i quali sono situati come una collana sopra un cono levigato col suo asse verticale ed il vertice in sopra; trovare le tensioni dei fili.

22. Un triangolo di area A gira per un angolo φ intorno ad un asse nel suo proprio piano parallelo ad un lato; mostrare che il minimo valore della superficie generata è

$$A \cdot \varphi \cdot \frac{(a+b+c)^2 - 2a^2}{2(b+c)\,a},$$

in cui a è il lato più grande.

FINE DELLA STATICA.

DINAMICA

PARTE PRIMA

DINAMICA DI UN ELEMENTO.

DINAMICA DI UN ELEMENTO.

CAPITOLO I.

Cinematica.

1. La *Dinamica* è la Scienza che investiga l'azione della Forza; e si divide naturalmente in due parti come segue.

2. La Forza si riconosce come agente in due modi: nella *Statica* come atta a costringere al riposo o ad evitare il cambiamento del moto, e nella *Cinetica* come capace di produrre o di cambiare il moto.

3. Nella Cinetica non è il semplice *moto* che si considera, ma la relazione delle *forze* al moto. Le circostanze del semplice moto, considerato senza relazione ai corpi mossi, o alle forze che producono il moto, o alle forze chiamate in azione dal moto, costituisce il soggetto di un ramo delle Matematiche pure, chiamato *Cinematica*. A questa, come una necessaria introduzione, dedichiamo il presente capitolo.

4. La ragione del moto (o la ragione del cambiamento di *posizione*) di un punto si chiama la sua *Velocità*. Essa è maggiore o minore secondo che lo spazio percorso in un dato tempo è maggiore o minore: ed essa può essere *uniforme*, cioè la stessa ad ogni istante; o pure può essere *variabile*.

La velocità uniforme è misurata dallo spazio percorso nell'unità di tempo, ed è, in generale espressa in metri per secondo; se molto grande, come nel caso della luce, essa può essere misurata in chilometri per secondo. Si deve osservare, che il *Tempo* è qui adoperato nel senso astratto di una quantità crescente uniformemente, ciò che nel Calcolo differenziale si chiama una variabile indipendente. La sua definizione fisica è data nel Cap. II.

5. Così, un punto che si muove uniformemente con la velocità v descrive uno spazio di v metri in ciascun secondo, e quindi vt metri in t secondi, t essendo un numero qualunque. Ponendo s per lo spazio descritto in t secondi, abbiamo

$$s = vt.$$

Quindi con l'unità di velocità un punto descrive l'unità di spazio nell'unità di tempo.

6. È bene di osservare che siccome, dalla nostra formola, abbiamo generalmente

$$v = \frac{s}{t},$$

e siccome nulla si è detto intorno alle grandezze di s e t, possiamo prendere queste tanto piccole quanto vogliamo. Così *otteniamo lo stesso risultato sia che deduciamo* v *dallo spazio descritto in un milione di secondi, o da quello descritto in un milionesimo di secondo*. Questa idea è molto utile, siccome quella che ci darà confidenza nei risultati quando si deve misurare una velocità variabile, e ci troviamo obbligati di approssimarci al suo valore considerando lo spazio descritto in un intervallo così piccolo che nella sua durata la velocità non si altera sensibilmente in valore.

7. La velocità si dice essere variabile quando il punto mobile non descrive spazii eguali in tempi eguali. *La velocità in ogni istante è allora misurata dallo spazio che sarebbe stato descritto in un'unità di tempo, se il punto si fosse mosso uniformemente durante quell'intervallo con la velocità che aveva nell'istante considerato*. Questo è un importantissimo, e nel fatto un fondamentale concetto, che lo studente deve perfettamente realizzare prima che egli possa utilmente procedere innanzi. Esso giace alla base di tutt'i metodi esatti che si sono immaginati allo scopo di misurare la ragione con la quale un *cambiamento*, di qualsivoglia natura, si trova di aver luogo.

Sia v la velocità del punto al tempo t, misurato da un'epoca fissa, s lo spazio descritto da esso durante quel tempo, ed $s + \delta s$ lo spazio descritto durante un intervallo maggiore $t + \delta t$. Supponiamo che v_1 sia la massima, e v_2 la minima velocità con la quale il punto si muove durante il tempo δt; allora $v_1 \delta t$, $v_2 \delta t$ sarebbero gli spazii che un punto descriverebbe in quell'intervallo, movendosi uniformemente con queste velocità rispettivamente. Ma la velocità attuale del punto non è maggiore di v_1, e non è

minore di v_2, quindi riguardo allo spazio attuale descritto,

δs non è maggiore di $v_1 \delta t$, e non è minore di $v_2 \delta t$,

o $\frac{\delta s}{\delta t}$ .... v_1 .... v_2,

comunque piccolo sia δt. Ma, a misura che δt diminuisce continuamente, v_1 e v_2 tendono continuamente a v, ed ultimamente diventano ad essa eguali. Quindi, passando al limite,

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Se v è negativa in questa espressione, essa indica che s diminuisce al crescere di t; il caso positivo che abbiamo preso come quello normale, riferendosi a quello in cui s e t crescono insieme. Ne segue che, se una velocità in una direzione si considera positiva, nella direzione opposta si deve considerare negativa; e per conseguenza il segno della velocità indica la direzione del moto.

Questo è, naturalmente, nella supposizione che la velocità varii con continuità, e non a salti. Si richiederebbe una forza infinita per produrre in un tempo infinitamente piccolo un tale cambiamento di velocità in un elemento *materiale*. Quindi siccome noi ci prepariamo per le applicazioni fisiche solamente, tali casi si possono escludere per ora. Di essi si tratterà nel capitolo sull' *Urto*.

8. Si vedrà facilmente che l'idea di velocità spiegata precedentemente è egualmente applicabile sia che si consideri il moto del punto in una retta, o in una linea curva. Nel secondo caso, però, la direzione del movimento cambia continuamente; e sarà necessario di conoscere ad ogni istante la direzione, del pari che la grandezza, della velocità del punto. Questo si fa usualmente, ed in generale il più convenientemente, considerando le velocità del punto parallele ai tre assi coordinati rispettivamente. Infatti, se le coordinate del punto si rappresentano con x, y, z i valori degli accrescimenti di queste, o le velocità parallele ai corrispondenti assi, saranno con un ragionamento analogo al precedente

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Dinotando con v l'intera velocità del punto, abbiamo

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}};$$

e, se α, β, γ sono gli angoli che la direzione del movimento fa con gli assi,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}};$$

o

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha = v_x \text{, supponiamo.}$$

Similmente,

$$\frac{dy}{dt} = v\cos\beta = v_y,$$

$$\frac{dz}{dt} = v\cos\gamma = v_z.$$

Quindi, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ si debbono trovare dalla velocità totale v, *risolvendola* come si dice; cioè moltiplicandola per i coseni di direzione della direzione del moto. Esse si chiamano le *Velocità componenti* del punto: e, rispetto ad esse, v si chiama la *Velocità risultante*.

9. Segue da ciò che si è detto, che, se un punto si muove in una direzione qualunque, possiamo supporre che la sua velocità sia la risultante di tre velocità coesistenti in tre direzioni qualunque ad angoli retti tra loro; o, più generalmente, in tre direzioni qualunque non nello stesso piano. Ma la risoluzione rettangolare è la più semplice e migliore eccetto in alcune molto speciali applicazioni.

Siano v_x, v_y, v_z le componenti rettangolari della velocità v di un punto in movimento, allora la parte risoluta di v secondo una linea inclinata agli assi sotto gli angoli α, β, γ sarà

$$v_x\cos\lambda + v_y\cos\mu + v_z\cos\nu.$$

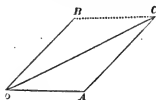
Infatti, siano α, β, γ gli angoli che la direzione del movimento del punto fa con gli assi, θ l'angolo tra questa direzione e la linea data. Allora siccome

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

la parte risoluta di v secondo quella linea è

$$v\cos\theta = v\{\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu\}$$
$$= v_x\cos\lambda + v_y\cos\mu + v_z\cos\nu.$$

10. Queste proposizioni sono virtualmente equivalenti alla seguente ovvia costruzione geometrica:

Per comporre due velocità qualunque come OA, OB nella figura; in cui OA, per esempio, rappresenta in grandezza e direzione lo spazio che sarebbe descritto in un secondo da un punto che si muove con la prima delle date velocità, e similmente OB per la seconda; da A si tiri AC parallela ed eguale ad OB. Si congiunga OC: allora OC è la velocità risultante in grandezza e direzione. Infatti i movimenti paralleli ad OA ed OB sono indipendenti.

OC è evidentemente la diagonale del parallelogrammo di cui due dei lati sono OA, OB.

Quindi la risultante di due velocità qualunque come OA, AC nella figura è una velocità rappresentata dal terzo lato, OC, del triangolo OAC.

Quindi se un punto ha, simultaneamente, velocità rappresentate da OA, AC, e CO, i lati di un triangolo *presi nello stesso ordine*, esso è in riposo.

Quindi la risultante delle velocità rappresentate dai lati di un poligono chiuso qualunque, sia o pur no in un piano, presi tutti nello stesso ordine, è zero.

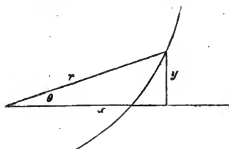
Quindi ancora la risultante delle velocità rappresentate da tutt' i lati di un poligono eccetto uno, presi in ordine, è rappresentata da quel lato in direzione opposta.

Quando vi sono due velocità o tre velocità in due o in tre direzioni rettangolari, la risultante è la radice quadrata della somma dei loro quadrati, ed i coseni dell' inclinazione della sua direzione alle date direzioni sono i rapporti delle componenti alla risultante.

11. *Quando un punto si muove in una curva piana, esprimere le sue velocità componenti ad ogni istante, secondo e perpendicolarmente al raggio vettore tirato da un punto fisso nel piano della curva.*

Siano x, y le sue coordinate rettangolari, r, θ le polari, sicchè

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Abbiamo immediatamente, con la differenziazione,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}\\ \text{e}\qquad \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt}\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

che sono le velocità parallele alle x ed y. Ma per l'Art. 9 la velocità secondo il raggio vettore è

$$\frac{dy}{dt}\,\text{sen}\,\theta + \frac{dx}{dt}\cos\theta = \frac{dr}{dt}\text{, da (1);}$$

e la velocità perpendicolare ad esso è

$$\frac{dy}{dt}\cos\theta - \frac{dx}{dt}\,\text{sen}\,\theta = r\frac{d\theta}{dt}\text{, da (1).}$$

12. La velocità di un punto si dice comunemente essere accelerata o ritardata secondo che essa cresce o diminuisce, ma la parola *Accelerazione* è usata scientificamente in tutti e due i sensi; e si può definire come la ragione del cambiamento della velocità per l'unità di tempo.

L'accelerazione può essere uniforme o variabile. Si dice essere uniforme quando il punto riceve eguali incrementi di velocità in tempi eguali, ed è allora misurata dall'attuale accrescimento di velocità generato nell'unità di tempo. L'unità di accelerazione sia presa in modo che un punto sotto la sua azione riceverebbe un incremento di una unità di velocità in una unità di tempo; allora un punto sotto l'influenza di α unità di accelerazione riceverebbe un incremento di α unità di velocità in una unità di tempo, e per conseguenza αt unità di velocità in t unità

di tempo. Se il punto parte dalla quiete abbiamo

$$v = \alpha t,$$

in cui v dinota la velocità alla fine dell'intervallo t, ed α l'accelerazione.

13. L'accelerazione è variabile quando il punto non riceve eguali incrementi di velocità in eguali incrementi di tempo. L'accelerazione ad ogni istante è allora misurata dall'incremento di velocità che sarebbe stato generato in una unità di tempo se l'accelerazione fosse rimasta costante durante quell'intervallo ed eguale al valore nel suo cominciamento.

Sia v la velocità del punto alla fine del tempo t, α l'accelerazione in quell'istante, $v+\delta v$ la velocità alla fine del tempo $t+\delta t$; e siano α_1, α_2 il massimo ed il minimo valore dell'accelerazione durante l'intervallo δt, allora $\alpha_1\delta t$, $\alpha_2\delta t$ sarebbero gl'incrementi di velocità in quell'intervallo, di un punto sottoposto a quelle accelerazioni rispettivamente. Ma l'accelerazione attuale non è maggiore di α_1 e non è minore di α_2, quindi l'incremento attuale di velocità

δv non è maggiore di $\alpha_1\delta t$ e non è minore di $\alpha_2\delta t$,

o $$\frac{\delta v}{\delta t} \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_2,$$

comunque piccolo sia δt. Ma, al diminuire continuamente δt, α_1 ed α_2 tendono continuamente ed in ultimo diventano eguali ad α. Quindi, passando al limite,

$$\frac{dv}{dt} = \alpha.$$

Il segno positivo dato ad α mostra che v cresce con t, mentre un segno negativo mostrerebbe che v decresce al crescere di t, in altri termini un'accelerazione negativa è una ritardanza.

Combinando l'equazione precedente con

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

abbiamo $$\frac{d^2s}{dt^2} = \alpha,$$

considerando t come la variabile indipendente.

14. Non abbiamo considerato che il movimento di un punto in una traiettoria *definita*, la quale può essere rettilinea o cur-

vilinea, ma nella quale vi è solamente *un* grado di libertà al movimento, e nella quale perciò la posizione ad ogni tempo è determinata da *una* variabile, s.

Se la traiettoria è curvilinea, le accelerazioni delle ragioni degli accrescimenti delle coordinate del punto che si muove si chiamano le *Accelerazioni componenti* parallele agli assi. Se queste si dinotano con α_x, α_y, α_z, avremo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \alpha_z.$$

Rispetto a queste, $\sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2}$ si chiama l'*Accelerazione risultante*.

15. L'accelerazione $\frac{d^2s}{dt^2}$ non è la completa risultante di $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, come si può vedere facilmente: infatti il suo quadrato non è eguale alla somma dei quadrati di quelle tre accelerazioni. Essa è però, la sola parte della loro risultante che ha un effetto sulla velocità; in breve $\frac{d^2s}{dt^2}$ è la somma delle parti risolute di $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ nella direzione del movimento, come lo mostra la seguente equazione identica:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ciò segue immediatamente dall'equazione dell'Art. 8

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

con la differenziazione. E questo mostra che l'accelerazione si deve risolvere secondo la stessa legge come la velocità. Infatti per trovare $\frac{d^2s}{dt^2}$, l'accelerazione secondo s, $\frac{d^2x}{dt^2}$ si deve moltiplicare per $\frac{dx}{ds}$, etc. etc. che è la legge del coseno.

L'altra parte della risultante è ad angoli retti a questa, ed il suo solo effetto si è di cambiare la direzione del movimento del punto. E questo ci conduce ad un'altra forma dell'accelerazione, quando la *velocità* del punto che si muove è inalterata, ma la *direzione* del movimento cambia. Il suo valore in termini della velocità e della curvatura sarà data più tardi.

L'equazione precedente mostra ancora, essendo $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ i coseni di direzione del piccolo arco ds che può avere una direzione qualunque, che per ottenere l'accelerazione secondo una linea qualunque inclinata agli assi sotto dati angoli, dobbiamo risolvere le accelerazioni componenti parallele agli assi secondo essa, e prendere la somma delle parti risolute. Così l'accelerazione secondo una linea inclinata sotto gli angoli λ, μ, ν agli assi è

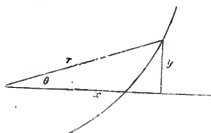
$$\alpha_x \cos\lambda + \alpha_y \cos\mu + \alpha_z \cos\nu,$$

16. *Un punto si muove in una curva piana, esprimere le sue accelerazioni componenti ad ogni istante secondo, e perpendicolarmente al raggio vettore.*

Siano x, y le coordinate rettangolari, r, θ le polari; sicchè

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta;$$

abbiamo
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt},$$

e
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\cos\theta - \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\operatorname{sen}\theta.$$

Similmente,
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\operatorname{sen}\theta + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\cos\theta.$$

Queste sono le accelerazioni parallele alle x ed alle y. E siccome, per l'Art. 15, l'accelerazione secondo il raggio vettore è

$$\frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{sen}\theta + \frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta,$$

le espressioni precedenti la danno nella forma

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

L'accelerazione perpendicolare al raggio vettore è

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cot\theta - \frac{d^2x}{dt^2}\operatorname{sen}\theta,$$

cioè,

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

che si può scrivere $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$.

17. *Quando un punto è in movimento in una curva qualunque trovare le sue accelerazioni secondo, e perpendicolarmente alla tangente ad ogni istante.*

Siano x, y, z le coordinate del punto alla fine del tempo t, s la lunghezza dell'arco descritto durante quell'intervallo. Allora, poichè per le equazioni della curva x, y, e z sono funzioni di s,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt};$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Similmente,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ricordando la legge di risoluzione dell'accelerazione, la *forma* di queste equazioni mostra che in esse sono risolute secondo le x, y, z 1° un'accelerazione $\frac{d^2s}{dt^2}$, i di cui coseni di direzione sono $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, e 2° un'accelerazione $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, di cui i coseni di direzione sono $\rho\frac{d^2x}{ds^2}, \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \rho\frac{d^2z}{ds^2}$. Questo procedimento avrebbe potuto essere impiegato con vantaggio in alcuni articoli precedenti. Ma, per il principiante, dobbiamo seguire un metodo più laborioso.

18. Per trovare l'accelerazione secondo la tangente dobbiamo moltiplicare queste accelerazioni componenti per $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, rispettivamente, e sommare. Così l'accelerazione tangenziale è

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

come abbiamo già veduto. Inoltre nella normale, verso il centro di curvatura, abbiamo l'accelerazione

$$\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \ldots\right) = \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Abbiamo preso, in ciò che precede, le equazioni seguenti dalla Geometria analitica,

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2,$$

in cui ρ è il raggio di curvatura, di cui i coseni di direzione sono

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \rho\frac{d^2z}{ds^2};$$

e

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

onde

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Le accelerazioni del punto mobile si possono trovare ancora nel seguente modo. Evidentemente non vi è alcuna accelerazione perpendicolare al piano osculatore, giacchè questo piano contiene due direzioni consecutive del movimento del punto. Delle due direzioni consecutive la prima faccia un angolo θ con una linea fissa qualunque nel piano osculatore, allora $v\cos\theta$ e $v\,\mathrm{sen}\,\theta$ sono le velocità del punto parallela e perpendicolare alla linea fissa rispettivamente. Per conseguenza $\frac{d}{dt}(v\cos\theta)$ e $\frac{d}{dt}(v\,\mathrm{sen}\,\theta)$ sono le accelerazioni nelle stesse direzioni. Queste espressioni, quando si sviluppano, diventano

$$\frac{dv}{dt}\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}, \text{ e } \frac{dv}{dt}\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Quindi le accelerazioni secondo la tangente e la normale sono $\frac{dv}{dt}$ e $v\frac{d\theta}{dt}$, l'ultima essendo positiva nella direzione del centro di curvatura. Siccome $\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho}$, l'accelerazione normale, essendo $=v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$, si può esprimere con $\frac{v^2}{\rho}$.

19. Avremmo potuto trattare le accelerazioni componenti così

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 \text{ o (l'accelerazione risultante)}^2$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^4+\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2,$$

sommando i quadrati dei loro valori dati nell'Art. 17.

Ora $\frac{d^2s}{dt^2}$, è l'accelerazione secondo la tangente, e l'altra parte $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, o $\frac{v^2}{\rho}$, agisce ad angoli retti su di essa come lo mostra la forma dell'equazione, o per conseguenza è l'accelerazione perpendicolare alla tangente.

Dalle espressioni per $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, otteniamo ancora

$$\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)$$
$$+\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$
$$+\frac{d^2z}{dt^2}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)=0\,;$$

che si può scrivere nella forma di un determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dt^2}, & \frac{d^2y}{dt^2}, & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{dx}{ds}, & \frac{dy}{ds}, & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2}, & \frac{d^2y}{ds^2}, & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}=0.$$

Questo significa che l'Accelerazione risultante giace nel piano

che contiene la tangente ed il raggio di curvatura assoluta, o sia che non vi è alcuna accelerazione perpendicolare al piano osculatore. L'accelerazione $\frac{v^2}{\rho}$ deve essere perciò secondo la normale alla curva tirata nel piano osculatore; cioè, secondo il raggio di curvatura assoluta.

20. Siamo perciò condotti a *sviluppare* la definizione data nell'Art. 12 così: l'Accelerazione è *la ragione del cambiamento di velocità sia che il cambiamento abbia luogo nella direzione del movimento o pur no.*

Ciò che s'intende per cambiamento di velocità è evidente dall'Art. 10. Poichè se una velocità OA (nella figura di quell'articolo) diviene OC, il suo cambiamento è AC, o OB.

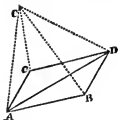
Quindi, appunto come la direzione del movimento di un punto è la tangente alla sua traiettoria, così la direzione dell'accelerazione di un punto mobile si deve trovare con la costruzione seguente.

Da un punto qualunque O si tirino le linee OP, OQ, etc., che rappresentino in grandezza e direzione la velocità del punto mobile ad ogni istante. I punti, P, Q, etc., formano in tutt'i casi del movimento di un elemento materiale una curva continua, poichè si richiede una forza infinitamente grande per cambiare la velocità di un elemento *bruscamente* in direzione o in grandezza. Ora se Q è un punto vicino a P, OP ed OQ rappresentano due valori successivi della velocità. Quindi PQ è l'intero cambiamento di velocità durante l'intervallo. A misura che l'intervallo diviene più piccolo la direzione PQ si avvicina sempre più alla tangente in P. Quindi la direzione dell'accelerazione è quella della tangente alla curva così descritta, chiamata dal suo inventore, W. R. Hamilton, l'*Odografo.*

L'ammontare dell'accelerazione è la ragione del cambiamento di velocità, ed è perciò misurato dalla velocità di P nella curva PQ.

21. Il *Momento* di una velocità intorno ad un punto qualunque è il rettangolo contenuto dalla sua grandezza e dalla perpendicolare abbassata dal punto sulla sua direzione. *Il momento della velocità risultante di un punto intorno ad un punto qualunque nel piano delle componenti è eguale alla somma algebrica*

dei momenti delle componenti, il segno proprio di ciascun momento dipendendo dalla direzione del movimento intorno al punto. Lo stesso è vero dei momenti dell'accelerazione, e della quantità di moto che sarà definita in appresso.

Si considerino due velocità componenti, AB ed AC, e sia AD la loro risultante (Art. 10). Le metà dei loro momenti intorno al punto O sono rispettivamente le aree OAB, OCA. Ora OCA, insieme con la metà dell'area del parallelogrammo $CABD$, è eguale ad OBD. Quindi la somma delle due metà dei momenti insieme con la metà dell'area del parallelogrammo è eguale ad AOB insieme con BOD, vale a dire, all'area dell'intera figura, $OABD$. Ma ABD, una parte di questa figura è eguale alla metà dell'area del parallelogrammo; e perciò la rimanente, OAD, è eguale alla somma delle due metà dei momenti. Ed OAD è la metà del momento della velocità risultante intorno al punto O. Quindi il momento della risultante è eguale alla somma dei momenti delle due componenti. Riflettendo ai *segni* dei momenti, vediamo che la proposizione vale quando O è dentro l'angolo CAB.

22. Ora se una delle componenti passa sempre pel punto O, il suo momento svanisce. Questo è il caso di un movimento in cui l'accelerazione è diretta ad un punto fisso, e dimostriamo così il teorema che *nel caso dell'accelerazione diretta sempre ad un punto fisso la traiettoria è piana e le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi*, infatti il momento della velocità, che in questo caso è costante, è evidentemente il doppio della ragione secondo la quale l'area è descritta dal raggio vettore.

23. Quindi in questo caso la velocità in ogni punto è inversamente proporzionale alla perpendicolare dal punto fisso sulla tangente alla traiettoria, la direzione momentanea del movimento.

Infatti, evidentemente il prodotto di questa perpendicolare per la velocità ad ogni istante dà il doppio dell'area descritta in un secondo intorno al punto fisso, la quale si è or ora mostrato di essere una quantità costante.

24. I risultati degli ultimi tre articoli si possono facilmente ottenere analiticamente, così. Si prenda il piano del movimento per quello delle x, y; e sia l'origine il punto rispetto al quale si

prendono i momenti. Allora se x, y è la posizione del punto mobile al tempo t, la perpendicolare dall'origine sulla tangente alla sua traiettoria è

$$p = x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = r^2\frac{d\theta}{ds}, \text{ in coordinate polari.}$$

Da questo abbiamo immediatamente

$$p\frac{ds}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

o con la notazione dell'Art. 8,

$$pv = xv_y - yv_x ,$$

che è il teorema dell'Art. 19.

Inoltre $$\frac{d}{dt}(pv) = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora, se l'accelerazione è diretta ad o da O, il suo momento rispetto ad O, che è evidentemente

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2},$$

deve svanire. Quindi (2) dà

$$pv = \text{costante, che è l'Art. 21.}$$

Per mezzo di (1) ciò dà

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{costante, che è l'Art. 20;}$$

poichè, se A è l'area descritta dal raggio vettore,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}.$$

25. *Determinare il movimento di un punto quando l'accelerazione della sua velocità è data.*

Questo è uno dei Problemi più generali suggeriti dalla Cinematica di un punto, poichè esso include, come si vedrà, la determinazione del movimento quando sono date le velocità componenti.

Siano α, β, γ le componenti della data accelerazione, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha , \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \beta , \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \gamma , \end{aligned}\right\} \text{..............................} \quad (1).$$

Ora α, β, γ possono essere funzioni di $x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, o $\frac{dz}{dt}$, o di due o più di queste quantità. Le equazioni (1) si debbono integrare come equazioni differenziali simultanee se è possibile. Così con una integrazione abbiamo i valori di $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ in termini di una o più delle quantità x, y, z e t; cioè, si conoscono le velocità componenti.

Un' altra integrazione, se essa può essere effettuata, dà x, y, e z, in termini di t; e, se l'ultima variabile si elimina dalle tre equazioni integrate, abbiamo le due equazioni della traiettoria nello spazio: e così, teoreticamente almeno, il movimento è completamente determinato.

Non è necessario di dare qui esempii dell' integrazióne di tali equazioni, poichè la maggior parte dei capitoli seguenti sarà dedicata ad essi.

26. Tutto ciò per un punto solo. Quando si considerano più punti, la Cinematica ci abilita a determinare, dai dati movimenti di tutti, i loro movimenti *relativi* rispetto ad alcuni tra essi; o viceversa, dal movimento attuale di uno, e dai movimenti relativi ad esso degli altri, a determinare i movimenti *attuali* di questi nello spazio. Ciò dipende dalla seguente proposizione per sè evidente.

Se la velocità di un punto qualunque di un sistema si rivolge in direzione, e si comunica a ciascun punto del sistema in composizione con quella che essa già possiede, i movimenti relativi di tutti rispetto al primo, così ridotto in quiete, saranno gli stessi che i loro movimenti relativi rispetto ad esso quando tutti erano in movimento.

Per la dimostrazione è sufficiente di notare che se ad ogni istante la distanza di due punti, e la direzione della linea che li congiunge sono le stesse che per due altri punti, i movimenti relativi di un punto di ciascuna coppia rispetto all' altro saranno

gli stessi. Le più semplici illustrazioni di questa proposizione sono fornite dai movimenti relativi degli oggetti in un vascello o in un carro, i quali sono indipendenti dalla velocità comune del tutto, o, in maggiore scala, degli oggetti terrestri, di cui i movimenti relativi non sono affetti dalla rotazione della terra, o dal suo movimento nello spazio.

Siccome le accelerazioni si compongono secondo la stessa legge come le velocità, il teorema precedente è vero ancora per esse.

27. *Due punti descrivono orbite simili l'uno intorno all'altro, ed intorno ad un punto qualunque che divide la linea che li congiunge in un dato rapporto.*

Siano A e B i punti, G un punto in AB tale che $\frac{AG}{GB}$=ad una costante.

La traiettoria di B intorno ad A sarà evidentemente la stessa che quella di A intorno a B, poichè la lunghezza e la direzione della linea AB sono le stesse qualunque estremo si supponga fisso. Inoltre se G è fisso la traiettoria di B intorno ad esso differirà evidentemente da quella di B intorno ad A avendo i corrispondenti raggi vettori diminuiti nel rapporto $\frac{BG}{AB}$. Ma questa è la definizione delle curve simili. Lo stesso naturalmente vale rispetto alla traiettoria relativa di A rispetto a G. Questa proposizione si troverà in seguito di considerevole utilità, poichè ci abilita materialmente a semplificare le equazioni del movimento di due elementi liberi che si attraggono scambievolmente.

28. Come un esempio di movimento relativo, *si considerino due punti l'uno dei quali si muova uniformemente in una linea retta mentre l'altro si muova uniformemente in un circolo intorno al primo come centro; determinare la traiettoria del secondo punto, il movimento essendo in un piano.*

Si prenda la linea di movimento del primo per asse delle x, v la sua velocità, il piano del circolo per quello delle xy, a il raggio della relativa orbita circolare, ω la velocità angolare in essa, Art. 32. Supponiamo che il punto girante sia inizialmente nell'asse. Inoltre al tempo t supponiamo che la linea che congiunge i punti sia inclinata sotto un angolo θ all'asse delle x. Allora per le coordinate del punto girante abbiamo

$$y = a \operatorname{sen} \theta ,$$
$$x = vt + a \cos \theta .$$

Ma $\theta = \omega t$;

quindi $x = \frac{v}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{a} + \sqrt{(a^2 - y^2)}$

è l'equazione della traiettoria assoluta richiesta. Questa appartiene alla classe delle cicloidi; essa è allungata o accorciata secondo che v è maggiore o minore di $a\omega$, o sia il movimento assoluto del primo punto maggiore o minore di quello dell'altro nella sua orbita circolare. Se i due movimenti sono eguali, o $v = a\omega$, abbiamo l'equazione della cicloide ordinaria, come invero è evidente, infatti la traiettoria circolare si può supporre il circolo generatore, e la velocità del centro nella sua traiettoria rettilinea è eguale a quella del punto descrivente intorno a quel centro.

29. È evidente che, qualunque sia la traiettoria relativa, se r, θ dinotano le coordinate relative del secondo punto rispetto al primo al tempo t, x, y, ed x' le coordinate assolute all'istesso tempo,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + r\cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Ora nel primo caso, quando il movimento del primo punto, e quello nell'orbita relativa sono dati, x', r, e θ sono note funzioni di t; quindi se questi valori si sostituiscono in (1), e si elimina t, avremo l'equazione tra x ed y, che si richiede.

Ancora, se tutte e due le orbite assolute sono date, x, y, ed x' sono conosciuti in termini di t, e così le equazioni (1) servono a dare r e θ in termini di t, il che fornisce la completa determinazione della traiettoria relativa, e le circostanze della sua descrizione.

30. Il seguente è un caso molto utile, avendo molte importanti applicazioni nell'Ottica fisica, etc.

Un punto A *è fisso.* B *descrive uniformemente un circolo intorno ad* A, *e* C *descrive uniformemente (nello stesso piano) un circolo intorno a* B. *Trovare il movimento di* C *relativo ad* A.

Sia a la lunghezza di AB, b quella di BC, r quella di AC; e al tempo t facciano esse gli angoli φ, χ, θ con una linea fissa nel piano del movimento. Allora

$$r\cos\theta = a\cos\varphi + b\cos\chi,$$
$$r\operatorname{sen}\theta = a\operatorname{sen}\varphi + b\operatorname{sen}\chi.$$

Ma φ e χ crescono uniformemente. Quindi

$$\varphi = mt + \alpha,$$
$$\chi = nt + \beta,$$

dove m, n, α, β, sono costanti. Così

$$r \cos \theta = a \cos (mt + \alpha) + b \cos (nt + \beta),$$
$$r \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen} (mt + \alpha) + b \operatorname{sen} (nt + \beta).$$

Queste sono le equazioni generali delle Epicicloidi ed Ipocicloidi; e da esse si possono dedurre tutte le loro proprietà.

Ci limitiamo ad uno o due dei casi più semplici.

(1) Sia $m=n$, $a=b$. (Questa è la composizione di due movimenti circolari eguali, nella stessa direzione e di periodi eguali). Abbiamo

$$r \cos \theta = 2a \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(mt + \frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$
$$r \operatorname{sen} \theta = 2a \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{sen} \left(mt + \frac{\alpha + \beta}{2}\right);$$

onde
$$r = 2a \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$\theta = mt + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Questo dinota ancora un movimento circolare uniforme, dello stesso periodo, e nella stessa direzione, come i movimenti componenti.

(2) Sia $m=-n$, $a=b$. (Qui si compongono movimenti circolari eguali, di eguali periodi, ma in direzioni opposte). Come sopra abbiamo

$$r \cos \theta = 2a \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \left(mt + \frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$
$$r \operatorname{sen} \theta = 2a \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \left(mt + \frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Quindi
$$r = 2a \cos \left(mt + \frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$
$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

e questo dinota un movimento vibratorio in una linea retta definita.

31. *In un sistema qualunque di punti in movimento, determinare i movimenti relativi dagli assoluti; e viceversa.*

Siano $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ le coordinate di due dei punti, x, y, z le coordinate relative del secondo rispetto al primo, $u_1 v_1 w_1$, $u_2 v_2 w_2$ le velocità di ciascuno parallele agli assi, u, v, w le velocità del secondo relativamente al primo.

Allora
$$x = x_2 - x_1\,, \quad u = u_2 - u_1\,,$$
$$y = y_2 - y_1\,, \quad v = v_2 - v_1\,,$$
$$z = z_2 - z_1\,, \quad w = w_2 - w_1\,.$$

Il secondo gruppo si può dedurre dal primo con la differenziazione rispetto a t.

Ora, quando sono dati i movimenti *attuali* dei due punti, tutte le quantità con indici sono conosciute. Quindi le equazioni precedenti danno le circostanze del movimento relativo.

O pure se si conosce il movimento attuale del primo punto, ed il movimento relativo del secondo intorno ad esso, abbiamo xyz, uvw, $x_1 y_1 z_1$, $u_1 v_1 w_1$, per trovare le altre sei quantità che si riferiscono al movimento attuale del secondo punto nello spazio.

Una seconda differenziazione dimostra ciò che si disse nell'Art. 26 riguardo all'accelerazione relativa.

32. Se il movimento di un punto in un piano si considera in relazione ad un punto fisso in quel piano, la ragione dell'accrescimento dell'angolo compreso dalla linea che congiunge i due punti, con una linea fissa nel piano, si chiama la *Velocità angolare* del primo punto intorno al secondo. L'unità di velocità angolare corrisponde alla descrizione di un arco eguale al raggio nell'unità di tempo.

Supponiamo che il suddetto angolo sia rappresentato da θ al tempo t; allora al tempo $t + \delta t$ esso ha il valore $\theta + \delta\theta$, e si può dimostrare come precedentemente (Art. 7), che se ω rappresenta la velocità angolare richiesta, allora

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\,.$$

Es. *Un punto si muove uniformemente con velocità* v, *in una linea retta; trovare ad ogni istante la sua velocità angolare intorno ad un punto fisso di cui la distanza dalla linea retta è* a.

Prendendo come linea iniziale la perpendicolare dal punto fisso sulla linea del movimento; l'equazione polare della traiettoria è

$$r = a \sec\theta.$$

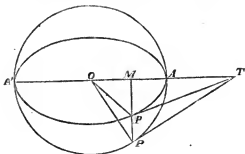
Inoltre, se $\theta=0$, quando $t=0$, abbiamo

$$r \operatorname{sen} \theta = vt.$$

Quindi, $a \tan \theta = vt$,

ed
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{va}{a^2 + v^2t^2} = \frac{va}{r^2}.$$

33. *Un punto descrive un cerchio con velocità uniforme; si cerca la velocità attuale, e la velocità angolare (intorno al centro) in una proiezione ortografica.*

Sia ApA' un'ellisse ed APA' il circolo ausiliario. Allora la

prima sarà la proiezione ortografica se il rapporto dei suoi assi è eguale al coseno dell'angolo (α) tra i piani di proiezione. Inoltre se PpM è perpendicolare ad AA', P e p saranno punti corrispondenti nelle due curve. Si tirino le tangenti pT, PT; allora

$$\frac{\text{velocità attuale in } p}{\text{. . . . . } P} = \frac{pT}{PT}, \text{ e se } TOP = \theta,$$

$$\frac{\text{velocità in } p}{\text{. . . . . } P} = \frac{\sqrt{(PT^2 \operatorname{sen}^2 \theta + PT^2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha)}}{PT}$$

$$= \sqrt{(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \alpha)}$$

$$= \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \theta)}.$$

Ora, se $TOp = \varphi$, $\dfrac{\text{velocità angolare in } p}{\text{. . . . . } P} = \dfrac{d\varphi}{d\theta}$

$$= \frac{d}{d\theta} \tan^{-1} (\cos \alpha \tan \theta)$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \theta + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Questo è un massimo se $\theta = \frac{\pi}{2}$, quando il suo valore è sec α,

. . . . minimo . . . $= 0$ . . . . cos α.

Quindi, se ω_1 ed ω_2 sono la massima e la minima velocità angolare nella proiezione,

$\sqrt{(\omega_1 \omega_2)}$ è la velocità angolare nella traiettoria primitiva.

34. Evidentemente, il prodotto del raggio vettore per la velocità angolare è la velocità perpendicolare al raggio vettore. Questa sta all'intera velocità come la perpendicolare sulla tangente sta al raggio vettore; e quindi il prodotto del quadrato del raggio vettore per la velocità angolare è eguale al prodotto dell'intera velocità per la perpendicolare sulla tangente, cioè, al momento della velocità rispetto al polo, Art. 24, (1).

35. La ragione dell'accrescimento o della diminuzione della velocità angolare, quando è variabile, si chiama l'*Accelerazione angolare*, e si misura relativamente alla stessa unità di angolo.

36. *Il movimento di un punto in un piano essendo dato rispetto ad assi fissi, investigare le espressioni per la sua velocità ed accelerazione relativa ad assi nello stesso piano, che rotano intorno ad un'origine comune con uniforme velocità angolare.*

Sia ω questa velocità angolare, allora, se al tempo $t = 0$ gli assi fissi ed i rotanti coincidono, al tempo t essi saranno inclinati tra loro sotto un angolo ωt. Quindi, se x, y, ξ, η sono le coordinate del punto al tempo t, riferito agli assi fissi ed ai rotanti rispettivamente, abbiamo per le formole ordinarie della trasformazione delle coordinate

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \cos \omega t + y \operatorname{sen} \omega t \\ \eta &= y \cos \omega t - x \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Queste danno, con la differenziazione,

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos \omega t + \frac{dy}{dt} \operatorname{sen} \omega t - \omega (x \operatorname{sen} \omega t - y \cos \omega t)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{dx}{dt} \cos \omega t + \frac{dy}{dt} \operatorname{sen} \omega t + \omega \eta \\ \text{Similmente, } \frac{d\eta}{dt} &= \frac{dy}{dt} \cos \omega t - \frac{dx}{dt} \operatorname{sen} \omega t - \omega \xi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2),$$

le quali determinano le velocità relative agli assi rotanti.

Inoltre,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}&=\frac{d^2x}{dt^2}\cos\omega t+\frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{sen}\omega t-2\omega\left(\frac{dx}{dt}\operatorname{sen}\omega t-\frac{dy}{dt}\cos\omega t\right)-\omega^2\xi\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}&=\frac{d^2y}{dt^2}\cos\omega t-\frac{d^2x}{dt^2}\operatorname{sen}\omega t-2\omega\left(\frac{dy}{dt}\operatorname{sen}\omega t+\frac{dx}{dt}\cos\omega t\right)-\omega^2\eta\end{aligned}\right\}\ (3),$$

o

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}&=\frac{d^2x}{dt^2}\cos\omega t+\frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{sen}\omega t+2\omega\frac{d\eta}{dt}+\omega^2\xi\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}&=\frac{d^2y}{dt^2}\cos\omega t-\frac{d^2x}{dt^2}\operatorname{sen}\omega t-2\omega\frac{d\xi}{dt}+\omega^2\eta\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (3'),$$

le accelerazioni relative.

Ora le accelerazioni componenti secondo gli assi *fissi*, con i quali al tempo t coincidono gli assi mobili, sono evidentemente rappresentate dai primi due termini dei secondi membri di queste equazioni; o, in termini delle coordinate rispetto agli assi mobili, da

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\omega\frac{d\eta}{dt}-\omega^2\xi,\quad \text{e}\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}+2\omega\frac{d\xi}{dt}-\omega^2\eta\ \ldots.\ (4).$$

Es. Se il punto è in quiete, x ed y sono costanti, e

$$\frac{d\xi}{dt}=\omega\eta,\qquad \frac{d\eta}{dt}=-\omega\xi.$$

Inoltre $$\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\omega^2\xi,\qquad \frac{d^2\eta}{dt^2}=-\omega^2\eta.$$

Queste espressioni sono ovvie, poichè in questo caso il movimento relativo del punto rispetto agli assi mobili è un movimento circolare uniforme intorno all'origine, nella direzione *negativa*, cioè dell'asse delle η a quello delle ξ.

37. *Si supponga che i nuovi assi non rotino uniformemente.* In questo caso l'investigazione è precisamente la stessa come nel precedente, con l'eccezione che θ, una data funzione di t, si deve sostituire per ωt. Se ω, ora non più costante, si pone per $\frac{d\theta}{dt}$, lo studente non incontrerà alcuna difficoltà nel verificare le espressioni seguenti, le quali prendono il posto di (2), (3') e (4)

dell' articolo precedente.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\,\text{sen}\,\theta + \omega\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{dy}{dt}\cos\theta - \frac{dx}{dt}\,\text{sen}\,\theta - \omega\xi\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots (2_1),$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\,\text{sen}\,\theta + \omega^2\xi + 2\omega\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\omega}{dt}\eta \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta - \frac{d^2x}{dt^2}\,\text{sen}\,\theta + \omega^2\eta - 2\omega\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\omega}{dt}\xi\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (3_1').$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \omega^2\xi - \frac{1}{\eta}\frac{d}{dt}(\omega\eta^2),\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} - \omega^2\eta + \frac{1}{\xi}\frac{d}{dt}(\omega\xi^2)\ \ldots\ (4_1).$$

Queste espressioni si potrebbero dedurre immediatamente dalle espressioni nell' Art. 16, con la considerazione delle accelerazioni relative come nell' Art. 26. Siano $OM = \xi$, $MP = \eta$, le coordinate del punto riferito agli assi mobili. Allora, per l'Art. 16, l'accelerazione di M secondo OM è

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \omega^2\xi.$$

Inoltre, siccome MP gira con la velocità angolare ω, l'accelerazione di P relativa ad M nella direzione perpendicolare ad MP, è

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{dt}(\omega\eta^2).$$

Questa è nella direzione della parte negativa dell'asse delle ξ. Quindi la parte risoluta parallela ad $O\xi$, dell'accelerazione relativa di P rispetto ad O, è

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \omega^2\xi - \frac{1}{\eta}\frac{d}{dt}(\omega\eta^2).$$

38. I principii già enunciati, e gli esempii dati della loro applicazione, saranno sufficienti per la soluzione dei problemi su questa parte del soggetto.

Altri esempii dell' applicazione di questi principii saranno più appropriatamente introdotti nei capitoli seguenti.

ESEMPII.

1. Un punto si muove in una data traiettoria partendo dalla quiete, e la sua velocità ad ogni istante è proporzionale al tempo scorso dal principio del suo movimento; trovare lo spazio descritto in un dato tempo.

2. Se un punto incomincia a muoversi con velocità v, e ad eguali intervalli di tempo si comunica ad esso una velocità u nella stessa direzione; trovare lo spazio descritto in n di tali intervalli.

3. Un uomo alto sei piedi cammina in una linea retta alla ragione di quattro miglia ad ora allontanandosi da una lampada da strada, l'altezza della quale è 10 piedi; supponendo che l'uomo parta dal posto della lampada, trovare la ragione secondo la quale si muove l'estremità della sua ombra, ed anche la ragione secondo la quale l'estremità della sua ombra si allontana da lui.

4. Se la posizione di un punto mobile in un piano è determinata dalle coordinate ρ e φ, ρ essendo misurato da un circolo fisso (di raggio a) lungo una tangente che ha girato per un angolo φ a partire da una tangente fissa; investigare le espressioni seguenti per le accelerazioni secondo e perpendicolarmente a ρ rispettivamente,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + a\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

ed

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right) + a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

5. Dimostrare che non è possibile per un punto di muoversi in modo che la sua velocità in ogni posizione sia proporzionale allo spazio che essa ha descritto partendo dalla quiete: inoltre che se la sua velocità è proporzionale allo spazio che esso deve descrivere, comunque piccolo, esso non lo percorrerà mai.

6. La velocità di un punto parallela a ciascuno di tre assi rettangolari è proporzionale al prodotto delle altre due coordinate; quali sono le equazioni della traiettoria, e quale è il tempo per descriverne una data porzione quando la curva passa per l'origine?

7. Un punto si muove in un piano, le sue velocità parallele agli assi delle x ed y sono

$$u + ey \text{ e } v + \varepsilon x \text{ rispettivamente,}$$

mostrare che esso si muove in una sezione conica.

8. Due punti si muovono con velocità uniforme in due linee rette, 1° in un piano, 2° nello spazio; date le circostanze inizia-

li, trovare quando essi saranno alla minima distanza tra loro. Mostrare ancora che in ambidue i casi la traiettoria relativa è una linea retta, descritta con velocità uniforme.

9. Più punti si muovono con velocità uniforme in linee rette nello spazio; determinare il movimento del loro centro comune d'inerzia. (Art. 52).

10. Una palla da cannone si muove in una direzione che fa un angolo acuto θ con la linea tirata dalla palla ad un osservatore; se V è la velocità del suono, ed nV quella della palla, dimostrare che il sibilo della palla in differenti punti del suo corso si udirà nell'ordine nel quale esso è prodotto, o nell'ordine inverso, secondo che $n < o > \sec\theta$.

11. Un elemento lanciato con una velocità u, è sollecitato da una forza, la quale produce un'accelerazione costante f, nel piano del movimento, inclinata sotto un angolo costante α alla direzione del moto. Ottenere l'equazione intrinseca della curva descritta, e mostrare che l'elemento si muoverà nella direzione opposta a quella di proiezione al tempo

$$\frac{u}{f\cos\alpha}\left(e^{\pi\cot\alpha}-1\right).$$

12. Mostrare che ogni movimento infinitamente piccolo impresso ad una figura piana nel suo proprio piano è equivalente ad una rotazione per un angolo infinitamente piccolo intorno ad un certo punto nella figura.

13. Il punto più alto della ruota di una carrozza che rotola sopra una strada ha una velocità doppia di quella di ciascuno dei due punti dell'orlo la di cui distanza dal suolo è la metà del raggio della ruota.

14. Una verga di data lunghezza si muove con le sue estremità in due date linee che s'intersegano; mostrare in qual modo tirare una tangente alla traiettoria descritta da un punto qualunque della verga.

15. Investigare la posizione del centro istantaneo intorno al quale la verga gira, ed applicare questo ancora a risolvere la questione precedente.

16. Un circolo rotola sopra un altro il di cui centro è fisso. Dalle posizioni iniziale e finale di un diametro in ciascuno determinare quali porzioni delle loro circonferenze sono state a contatto.

17. Un punto descrive il diametro AB di un circolo con velocità uniforme, ed un altro la semicirconferenza AB dalla quiete con accelerazione tangenziale uniforme; essi partono insieme da

A ed arrivano insieme in B; mostrare che le velocità in B stanno come $\pi : 1$.

18. Determinare la traiettoria di un punto P che continuamente, con velocità uniforme u, si muove verso un altro punto Q, il quale descrive una linea retta con velocità uniforme v. Trovare nel caso di $\frac{v}{u} < 1$ la lunghezza del tempo finchè P raggiunge Q.

19. Un battello, spinto (relativamente all'acqua) con velocità uniforme u, parte da un punto A nel lido di un fiume che corre con velocità v parallela a Qx, e tende continuamente al punto Q, sull'altro lido, direttamente opposto ad A; determinare la sua traiettoria. Trovare la massima distanza alla quale il battello è trascinato dalla corrente, e mostrare che quando esso è in quella posizione la sua velocità è $\sqrt{(u^2-v^2)}$.

Quando $u=v$, mostrare direttamente che la curva descritta è una parabola.

20. Nella quistione 18 mostrare che se ρ è il raggio di curvatura della traiettoria si ha $\rho = \frac{uPQ^2}{vPM}$, in cui PM è la distanzadi P dalla retta percorsa dal punto Q.

21. Nel caso di un battello spinto con velocità u relativamente all'acqua in un fiume che corre con velocità v, mostrare che il battello passa da un dato punto ad un altro nel minimo tempo possibile quando la sua traiettoria attuale è una linea retta.

22. La velocità di un fiume varia come la distanza dal lido più vicino; mostrare che un uomo il quale cerca di nuotare direttamente a traverso descriverà due semi-parabole. (Mostrare che la sunnormale è costante). Trovare di quanto la velocità media è accresciuta.

23. Un punto si muove uniformemente in un circolo; trovare un'espressione per la sua velocità angolare intorno ad un punto qualunque nel piano del circolo.

24. Se la velocità di un punto che si muove in una curva piana varia come il raggio di curvatura, mostrare che la direzione del movimento gira con velocità angolare uniforme.

25. Due ruote a gomito rotolano insieme; essendo data la velocità angolare della prima ruota e le inclinazioni degli assi dei coni, trovare i loro angoli verticali affinchè la seconda giri con data velocità angolare.

26. Supponendo che la Terra e Venere descrivano nello stesso

piano circoli intorno al Sole come centro; investigare un' espressione per la velocità angolare della Terra intorno a Venere in ogni posizione, le velocità attuali essendo inversamente come le radici quadrate delle loro distanze dal Sole.

27. Un elemento che si muove uniformemente intorno alla base circolare di un cono obliquo è proiettato per mezzo delle linee generatrici sopra una sezione succontraria; trovare la sua velocità angolare intorno al centro di questa.

28. Se ξ, η dinotano le coordinate di un punto mobile riferito a due assi, uno dei quali è fisso e l'altro gira con velocità angolare uniforme ω, dimostrare che le sue accelerazioni componenti parallele a questi assi sono

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega \operatorname{cosec} \omega t \frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \omega^2\eta + 2\omega \cot \omega t \frac{d\eta}{dt}.$$

29. Due linee si muovono nel loro proprio piano intorno al loro punto d'intersezione con velocità angolari uniformi ω, ω'; se le coordinate di un punto mobile riferito ad esse sono x, y ad un tempo t, dimostrare che le sue accelerazioni parallele agli assi sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x - 2\omega \cot(\omega' - \omega)\, t \frac{dx}{dt} - 2\omega' \operatorname{cosec}(\omega' - \omega)\, t \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \omega^2 y - 2\omega \operatorname{cosec}(\omega' - \omega)\, t \frac{dx}{dt} - 2\omega' \cot(\omega' - \omega)\, t \frac{dy}{dt}.$$

30. Impiegare le formole dell'Art. 30 per tracciare approssimativamente la forma della traiettoria di C intorno ad A, quando m è prossimamente, ma non esattamente, eguale a $+n$ o a $-n$.

31. Se un numero dispari n di verghe OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... di cui le lunghezze sono $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \dots \frac{a}{n}$, sono unite a cerniera in A_1, A_2,... e girano con accelerazioni angolari uniformi α, 2α, 3α, ...$n\alpha$, intorno alle loro estremità OA_1 A_2, ...A_{n-1}, mostrare che la direzione del movimento del punto A_n ad un tempo qualunque è perpendicolare alla direzione della verga media; il movimento incominciando dalla quiete con le verghe in una linea retta.

32. Un uomo è in un battello, su di un fiume, ad una distanza a dal lido, e b da una caduta d'acqua a prua. Se la velocità della corrente è V, dimostrare che egli non può evitare la caduta a meno che non possa remare con una velocità $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} V$; e che nel

caso egli possa remare appunto con questo passo, la direzione nella quale egli deve remare è ad angoli retti alla linea che congiunge la sua posizione col punto del lido opposto alla cascata. Trovare ancora la direzione nella quale egli avrebbe la minima distanza a remare per giungere al lido, supponendo la sua velocità maggiore di questo minimo.

33. Se un punto si muove in una ipocicloide con velocità u; e v, V rappresentano le velocità del centro di curvatura e del centro del circolo generatore corrispondente alla posizione del punto, dimostrare che

$$\frac{u^2}{(c-b)^2}+\frac{v^2}{(c+b)^2}=\frac{4V^2}{(c-b)^2},$$

c essendo la distanza tra i centri dei circoli generatori, e b il raggio del circolo mobile.

34. N elementi sono disposti equabilmente lungo la circonferenza di un circolo di raggio a; ciascuno si muove continuamente verso il seguente in ordine con una velocità costante v; mostrare che essi arriveranno insieme al centro del circolo nel tempo

$$\frac{a}{v}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{N}.$$

35. Un punto P si muove con velocità uniforme in un circolo. Q è un punto nello stesso raggio alla distanza doppia dal centro, PR è la tangente in P eguale all'arco descritto da P dal principio del movimento: mostrare che l'accelerazione del punto R è rappresentata in direzione e grandezza da RQ.

36. Se un punto si muove in un'orbita in modo che l'area descritta in ogni tempo dal raggio di curvatura sia proporzionale a quel tempo, dimostrare che la direzione dell'accelerazione del punto è perpendicolare alla linea che congiunge il punto al centro corrispondente di curvatura dell'evoluta, e la sua grandezza (F) è data dall'equazione

$$\frac{F^2}{u^2}=c^4\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+u^4\right\},$$

in cui u è l'indice di curvatura del punto, e c è il doppio dell'area descritta in una unità di tempo.

37. Un piano si muove intorno ad un asse perpendicolare ad esso, ed un punto si muove in una data curva tracciata sul piano; in una posizione qualunque ω è la velocità angolare del piano, v la velocità dell'elemento relativa al piano, r la sua distanza dall'asse, p la perpendicolare sulla tangente, s l'arco descritto lungo

il piano; dimostrare che l'accelerazione secondo la tangente della curva è

$$v\left(\frac{dv}{ds}+p\frac{d\omega}{ds}\right)-\omega^2 r\frac{dr}{ds}.$$

38. Un elemento si muove sopra una superficie: v, v' sono le componenti della sua velocità secondo le linee di curvatura, ρ, ρ' i raggi principali di curvatura; dimostrare che l'accelerazione secondo la normale alla superficie $=\frac{v^2}{\rho}+\frac{v'^2}{\rho'}$.

39. L'equazione intrinseca di una curva essendo $s=f(\varphi)$, la curva è descritta da un punto con le accelerazioni X, Y parallele alla tangente ed alla normale nel punto pel quale $\varphi=0$; dimostrare che

$$\cos\varphi\left(\frac{dY}{d\varphi}-3X\right)-\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{dX}{d\varphi}+3Y\right)$$
$$+\frac{f''(\varphi)}{f'(\varphi)}(Y\cos\varphi-X\operatorname{sen}\varphi)=0.$$

40. Ottenere le espressioni delle accelerazioni di un punto mobile di cui le coordinate sono r, θ, φ, (1) nella direzione di r, (2) nella direzione perpendicolare al raggio vettore e nel piano di θ, (3) nella direzione perpendicolare al piano di θ.

41. Un punto descrive un rombo di vento sopra una sfera in modo tale che la sua longitudine cresce uniformemente; dimostrare che l'accelerazione risultante varia come il coseno della latitudine, e che la sua direzione fa con la normale un angolo eguale alla latitudine.

42. Un foglio piano rigido è privato per mezzo di guida-pezzi di ogni libertà di movimento eccetto parallelamente ad una linea fissa nel piano. Se esso è posto in moto dall'estremità di un ago, che descrive una data linea in un dato modo ed opera in una traccia di data forma tagliata nel foglio, formare l'equazione del movimento rettilineo del foglio.

43. Investigare completamente i casi dell'Esempio 42 quando

(*a*) la traccia è rettilinea,

(*b*) la traccia è un arco di circolo,

il movimento dell'ago essendo circolare ed uniforme.

CAPITOLO II.

Leggi del Moto.

39. Nel capitolo precedente avendo considerato brevemente le pure proprietà geometriche del movimento di un punto o elemento, dobbiamo ora trattare delle cause che producono varie circostanze del moto; e delle leggi sperimentali, sulla supposta verità delle quali si fondano tutte le nostre seguenti investigazioni. Ed è chiaro che ora introduciamo per la prima volta le idee di *Materia*, e di *Forza*.

Incominciamo con alcune definizioni e spiegazioni, necessarie per la completa enunciazione delle Leggi di Newton e delle loro conseguenze.

40. La *Quantità di Materia* in un corpo, o la *Massa* di un corpo, è proporzionale al *Volume* ed alla *Densità* insieme. La *Densità* si può definire perciò come la quantità di materia nell'unità di volume.

Se M è la massa, ρ la densità, e V il volume, di un corpo omogeneo, abbiamo immediatamente

$$M = V\rho ;$$

se prendiamo le nostre unità in modo che l'unità di massa sia la massa dell'unità di volume di un corpo dell'unità di densità. Se la densità varia da punto a punto, abbiamo, naturalmente,

$$M = \iiint \rho dV .$$

41. Un *Elemento* di materia si suppone essere così piccolo, che sebbene ritenga le sue proprietà materiali, esso può essere trattato per quanto concerne le sue coordinate, etc. come un punto geometrico.

42. La *Quantità di Moto* di un corpo in movimento è proporzionale alla sua massa ed alla velocità insieme.

Quindi, se prendiamo come unità di quantità di moto la quantità di moto di un'unità di massa che si muove con l'unità di velocità, la quantità di moto di una massa M che si muove con velocità v è Mv.

43. Il *Cambiamento della Quantità di Moto* è proporzionale alla massa in movimento ed al cambiamento della sua velocità insieme.

Il cambiamento di velocità si deve intendere nel senso generale dell'Art. 10. Così, con la notazione di quell'articolo, se una velocità rappresentata da OA si cambia in un'altra rappresentata da OC, il cambiamento di velocità è rappresentato in grandezza e direzione da AC.

44. La *Ragione del Cambiamento della Quantità di Moto*, o *l'Accelerazione della Quantità di Moto*, è proporzionale alla massa in movimento ed all'accelerazione della sua velocità insieme. Così (Art. 17) l'accelerazione della quantità di moto di un elemento che si muove in una curva è $M\frac{d^2s}{dt^2}$ secondo la tangente, ed $M\frac{v^2}{\rho}$ nel raggio di curvatura assoluta.

45. La *Forza Viva*, o *Energia Cinetica*, di un corpo in movimento è proporzionale alla massa ed al quadrato della velocità insieme. Se adottiamo le stesse unità di massa e di velocità come sopra, vi è particolare vantaggio nel definire l'energia cinetica come *la metà* del prodotto della massa pel quadrato della sua velocità.

46. La *Ragione del Cambiamento dell'Energia Cinetica* (quando è definita come sopra) è il prodotto della velocità per la componente dell'accelerazione della quantità di moto nella direzione del movimento.

Infatti $$\frac{d}{dt}\left(\frac{Mv^2}{2}\right) = Mv\frac{dv}{dt} = v\left(M\frac{d^2s}{dt^2}\right).$$

47. La materia ha in sè la potenza di resistere alle influenze esterne, così che ogni corpo, finchè può, rimane in quiete, o si muove uniformemente in una linea retta.

Questa, l'*Inerzia* della materia, è proporzionale alla quantità di materia nel corpo. Ne segue che si richiede qualche *causa* per turbare l'uniformità del moto di un corpo, o per cambiare la sua direzione dal naturale cammino rettilineo.

48. *Forza impressa*, o semplicemente *Forza*, è ogni causa che tende ad alterare lo stato naturale di un corpo, di quiete, o di moto uniforme in una linea retta.

I tre elementi che specificano una forza, o i tre elementi che

debbono essere conosciuti, prima che si possa acquistare una chiara nozione della forza che si considera, sono, il suo punto di applicazione, la sua direzione, e la sua grandezza.

49. La *Misura di una Forza* è la quantità di moto che essa produce nell'unità di tempo. Secondo questo modo di misura, *l'unità di forza è quella forza che, agendo sull'unità di materia durante l'unità di tempo, genera l'unità di velocità.*

50. Le forze (siccome esse hanno solamente direzione e grandezza) si possono rappresentare, come le velocità, con linee rette nelle loro direzioni, e di lunghezze proporzionali alle loro grandezze, rispettivamente.

Inoltre le leggi della composizione di un numero qualunque di forze agenti sullo stesso punto, sono, come fra poco mostreremo, Art. 61, le stesse di quelle che abbiamo già dimostrato valere per le velocità; sicchè, con la sostituzione di forza per velocità, l'Art. 10 è ancora vero.

51. La *Componente* di una forza in una direzione, talvolta chiamata la *Componente effettiva* in quella direzione, si trova perciò moltiplicando la grandezza della forza per il coseno dell'angolo tra le direzioni della forza e della componente. La rimanente componente in questo caso è perpendicolare all'altra.

Generalmente è molto conveniente di risolvere le forze in componenti parallele a tre linee ad angoli retti tra loro; ciascuna di queste risoluzioni essendo effettuata moltiplicando per il coseno dell'angolo corrispondente.

La grandezza della risultante di due, o di tre forze in direzioni ad angoli retti tra loro, è la radice quadrata della somma dei loro quadrati.

52. Il *Centro d'Inerzia o di Massa* di un sistema qualunque di punti materiali (o rigidamente connessi tra loro, o connessi in un modo qualunque, o del tutto staccati) è un punto di cui la distanza da ogni piano è eguale alla somma dei prodotti di ciascuna massa per la sua distanza dallo stesso piano divisa per la somma delle masse.

La distanza dal piano delle yz, del centro d'inerzia delle masse m_1, m_2, etc., è perciò

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \text{etc.}}{m_1 + m_2 + \text{etc.}} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}.$$

E similmente per le altre coordinate.

Quindi la sua distanza dal piano

$$\delta = \lambda x + \mu y + \nu z - a = 0,$$

è

$$D = \lambda x' + \mu y' + \nu z' - a,$$

$$= \frac{\Sigma \{ m (\lambda x + \mu y + \nu z - a) \}}{\Sigma m} = \frac{\Sigma(m\delta)}{\Sigma m},$$

come si è stabilito sopra. E la sua velocità perpendicolare a quel piano è

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{\Sigma m} \Sigma \left\{ m \left(\lambda \frac{dx}{dt} + \mu \frac{dy}{dt} + \nu \frac{dz}{dt} \right) \right\} = \frac{\Sigma \left(m \frac{d\delta}{dt} \right)}{\Sigma m},$$

dalla quale, moltiplicando per Σm, e notando che δ è la distanza di x, y, z da $\delta=0$, vediamo che la somma delle quantità di moto delle parti del sistema in una direzione qualunque è eguale alla quantità di moto in quella direzione dell'intera massa riunita nel centro d'inerzia.

53. Introducendo, nella definizione del momento della velocità (Art. 21), la massa del corpo in movimento come fattore, abbiamo un elemento importante della dinamica, il *Momento della Quantità di Moto.*

54. Una forza si dice che *fa Lavoro* se essa muove il corpo al quale è applicata, ed il lavoro fatto si misura con la resistenza vinta, e lo spazio lungo il quale essa è vinta, insieme.

Così, nell'alzare dei carboni da una miniera, l'ammontare del lavoro fatto è proporzionale al peso dei carboni alzati; cioè, alla forza vinta nell'alzarli; ed anche all'altezza lungo la quale essi sono stati alzati. Nelle misure puramente scientifiche, l'unità di lavoro è l'unità di forza cinetica (Art. 49) agente per l'unità di spazio.

Se il peso è alzato obbliquamente, come, per esempio, lungo un piano inclinato levigato, lo spazio lungo il quale la forza deve essere vinta è aumentato nel rapporto della lunghezza all'altezza del piano; però la forza da vincere non è l'intero peso, ma solamente la parte risoluta del peso parallela al piano; e questa è minore del peso nel rapporto dell'altezza del piano alla sua lunghezza. Moltiplicando queste due espressioni insieme, troviamo, come potevamo aspettarci, che l'ammontare del lavoro richiesto non si cambia sostituendo il cammino obbliquo al verticale.

55. Generalmente, se s è un arco della traiettoria di un elemento, S la componente tangenziale delle forze applicate, il lavoro fatto sull'elemento tra due punti qualunque della sua traiettoria è

$$\int S ds,$$

preso tra i limiti corrispondenti alle posizioni iniziale e finale.

Riferito a coordinate rettangolari, è facile vedere, per la legge della risoluzione delle forze, Art. 61, che questo diviene

$$\int\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Così apparisce che, per una forza qualunque, il lavoro fatto durante uno spostamento infinitamente piccolo del punto di applicazione è il prodotto della parte risoluta della forza nella direzione dello spostamento per lo spostamento.

Segue da ciò, che se il movimento di un corpo è sempre perpendicolare alla direzione nella quale una forza agisce, una tale forza non fa lavoro. Così la pressione normale scambievole tra un corpo fisso ed uno mobile, la tensione del filo al quale è attaccato un pendolo, l'attrazione del sole sopra un pianeta se il pianeta descrive un circolo col sole nel centro sono tutti casi nei quali la forza non fa alcun lavoro.

In fatti la condizione geometrica affinchè la risultante di X, Y, Z sia perpendicolare a ds è

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0\ ,$$

e questa fa svanire la precedente espressione del lavoro.

56. Il lavoro fatto su di un corpo da una forza si mostra sempre per mezzo di un accrescimento corrispondente di forza viva, o energia cinetica, se nessuna altra forza agisce sul corpo che possa far lavoro o abbia fatto lavoro contro di essa. Se si fa lavoro contro alcune forze, l'accrescimento di energia cinetica è minore di quello nel primo caso per quanto è l'ammontare del lavoro così fatto. In virtù di questo, però, il corpo possiede un equivalente nella forma di *Energia Potenziale*, se le sue condizioni fisiche sono tali che queste forze agiranno egualmente, e nelle stesse direzioni, se il movimento del sistema è invertito. Così può stare che non si produca alcun cambiamento di energia cinetica, ed il lavoro fatto può essere interamente conservato come energia potenziale.

Così un peso richiede lavoro per essere portato ad un'altezza, una molla richiede lavoro per essere piegata, l'aria richiede lavoro per essere compressa, etc.; ma un peso innalzato, una molla piegata, l'aria compressa, etc., sono *magazzini* di energia di cui si può far uso a piacere.

Essendo premesse queste definizioni, diamo le *Leggi del Moto* di Newton.

57. Legge I. *Ogni corpo continua nel suo stato di quiete o di moto uniforme in linea retta, sino a che non sia costretto da forze impresse a cambiare quello stato.*

Possiamo logicamente convertire l'asserzione della prima legge del moto rispetto alla velocità nella seguente proposizione.

I tempi durante i quali un corpo particolare qualunque, non sollecitato da forza ad alterare la prestezza del suo movimento, percorre spazii eguali, sono eguali. Ed, ancora: Ogni altro corpo nell'universo, non sollecitato da forza ad alterare la prestezza del suo movimento, percorre spazii eguali in intervalli successivi, durante i quali il corpo particolare scelto percorre spazii eguali.

58. La prima parte esprime semplicemente la convenzione generalmente adottata per la misura del *Tempo*. La terra, nella sua rotazione intorno al suo asse, ci presenta un caso di movimento nel quale la condizione di non essere sollecitato da forza ad alterare la sua prestezza, è più prossimamente soddisfatta che in ogni altro che potessimo facilmente o accuratamente osservare. Quindi la misura numerica del tempo si fonda praticamente nel definire gli *eguali intervalli di tempo*, come *tempi durante i quali la terra gira per angoli eguali*. Questa è, naturalmente, una pura convenzione, e non una legge di natura; e, come ora lo vediamo, è una parte della prima legge di Newton.

Il rimanente della legge non è una convenzione, ma una grande verità naturale, che possiamo illustrare con i casi semplici e triviali del pari che con i più grandi fenomeni che si possono concepire.

59. Legge II. *Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza impressa, ed ha luogo nella direzione della linea retta nella quale la forza agisce.*

Abbiamo considerato il cambiamento di velocità, o l'accelerazione, come una quantità puramente geometrica, ed abbiamo veduto come essa si può dedurre immediatamente dalle velocità iniziale e finale di un corpo. Dalla definizione del moto, o quan-

tità di moto (Art. 42), vediamo che, se si moltiplica il cambiamento di velocità, così geometricamente determinato, per la massa del corpo, abbiamo il cambiamento di moto (Art. 43) a cui si allude nella legge di Newton, come la misura della forza che lo produce.

Si deve notare particolarmente, che in questa proposizione nulla è detto intorno al moto attuale del corpo prima che su di esso agisca la forza: è solamente il *cambiamento* del moto che ci riguarda. Così la stessa forza produrrà precisamente lo stesso cambiamento di moto in un corpo, sia il corpo in riposo, o in movimento con una velocità qualunque.

60. Ancora, si deve notare che nulla è detto se il corpo sia sotto l'azione di *una* forza solamente; sicchè possiamo logicamente porre parte della seconda legge nella seguente forma (apparentemente) amplificata.

Quando delle forze qualunque agiscono sopra un corpo, allora sia il corpo primitivamente in riposo o in movimento con una velocità ed in una direzione qualunque, ciascuna forza produce nel corpo l'esatto cambiamento di moto che avrebbe prodotto se essa avesse agito isolatamente sul corpo primitivamente in quiete.

61. Una conseguenza importante segue immediatamente da questo aspetto della seconda legge. Siccome le forze sono misurate dai cambiamenti di moto che esse producono, e le loro direzioni sono assegnate dalle direzioni nelle quali questi cambiamenti sono prodotti; e siccome i cambiamenti di moto di uno stesso corpo sono nelle direzioni dei cambiamenti di velocità, e proporzionali ad essi, una forza sola misurata dal cambiamento risultante della velocità, e nella sua direzione, sarà l'equivalente di un numero qualunque di forze agenti simultaneamente. Quindi

La risultante di un numero qualunque di forze (applicate ad un punto) si trova con lo stesso procedimento geometrico come la risultante di un numero qualunque di velocità simultanee.

Da ciò segue immediatamente (Art. 10) la costruzione del *Parallelogrammo delle Forze* per trovare la risultante di due forze agenti nello stesso punto, e del *Poligono delle Forze* per la risultante di un numero qualunque di forze agenti in un punto. E, per quanto concerne un solo elemento, abbiamo immediatamente l'intero soggetto della Statica.

62. La seconda legge ci dà i mezzi di misurare la forza, ed anche di misurare la massa di un corpo.

Infatti, se si considerano le azioni di varie forze sullo stesso corpo per tempi eguali, abbiamo evidentemente cambiamenti di velocità prodotti, i quali sono *proporzionali* alle forze. I cambiamenti di velocità, quindi, ci danno in questo caso i mezzi per paragonare le grandezze delle diverse forze. Così le velocità acquistate in un secondo dalla stessa massa (cadendo liberamente) in differenti luoghi della superficie terrestre, ci danno i valori relativi dell'attrazione della terra in quei luoghi.

Ancora, se forze eguali si esercitano sopra diversi corpi, i cambiamenti di velocità prodotti in tempi eguali debbono essere *inversamente* come le masse dei varii corpi. Questo è approssimativamente il caso, per esempio, con i treni di diversa lunghezza tirati dalla stessa locomotiva.

Ancora, se troviamo un caso in cui diversi corpi, ciascuno sollecitato da una forza, acquistano nello stesso tempo lo stesso cambiamento di velocità, le forze debbono essere proporzionali alle masse dei corpi. Questo, quando si rimuove la resistenza dell'aria, è il caso dei corpi che cadono; e da esso conchiudiamo che *il peso di un corpo in una data località, o la forza con la quale la terra lo attrae, è proporzionale alla sua massa*. Questa è una parte importante della grande *Legge della Gravitazione*.

63. Apparisce, finalmente, da questa legge, che ogni teorema di Cinematica relativo all'accelerazione ha il suo corrispondente nella Cinetica. Così per esempio (Art. 18), vediamo che la forza, sotto l'azione della quale un elemento descrive una curva qualunque, si può risolvere in due componenti, l'una nella tangente della curva, l'altra *verso* il centro di curvatura; le loro grandezze essendo l'accelerazione della quantità di moto, ed il prodotto della quantità di moto per la velocità angolare intorno al centro di curvatura, rispettivamente. Nel caso del moto uniforme, la prima di queste svanisce, o, l'intera forza è perpendicolare alla direzione del moto. Quando non vi è alcuna forza perpendicolare alla direzione del moto, non vi è curvatura, o la traiettoria è una linea retta.

Quindi, se risolviamo le forze, agenti su di un elemento di massa m di cui le coordinate sono x, y, z, nelle tre componenti rettangolari X, Y, Z; abbiamo

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

In alcuni dei capitoli seguenti queste equazioni saranno alquanto semplificate prendendo l'unità per la massa dell'elemento

mobile. Quando ciò non si può fare, è alle volte conveniente di prendere X, Y, Z come le forze componenti *sull' unità di massa*, e l'equazioni precedenti diventano

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mX, \text{ etc. };$$

dalle quali m naturalmente si può togliere.

Se non vi è alcuna accelerazione, abbiamo evidentemente l'equilibrio tra le forze. Quindi le equazioni del movimento di un elemento si cambiano in quelle dell'equilibrio ponendo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ etc.}$$

64. Per mezzo delle prime due leggi, siamo giunti ad una *definizione* e ad una *misura* della forza; ed abbiamo anche trovato come comporre, e perciò anche come risolvere, le forze; ed ancora come investigare le condizioni di equilibrio o di movimento di un solo elemento assoggettato a date forze. Ma di più si richiede prima che potessimo intendere completamente i casi più complessi di movimento, specialmente quelli nei quali abbiamo azioni scambievoli tra due o più forze; tali come, per esempio, attrazioni o pressioni o trasmissione di energia in forma qualunque. Questo è supplito perfettamente dalla

65. LEGGE III. *Ad ogni azione vi è un' eguale e contraria reazione: o sia, le azioni scambievoli di due corpi qualunque sono sempre eguali e direttamente opposte nella stessa linea retta.*

Se un corpo preme o trae un altro, esso è premuto o tratto da quest'altro con una forza eguale nella direzione opposta. Se uno preme una pietra col suo dito, il suo dito è premuto con una forza eguale nella direzione opposta dalla pietra. Un cavallo, rimorchiando una barca in un canale, è strascinato indietro con una forza eguale a quella che esso imprime innanzi alla fune rimorchiante. Di qualunque quantità, ed in qualunque direzione, sia cambiato il movimento di un corpo pel suo urto su di un altro, quest'altro corpo avrà il suo movimento cambiato della stessa quantità nella direzione opposta; poichè a ciascun istante durante l'urto essi esercitano l'uno sull'altro pressioni eguali ed opposte. Quando nessuno dei due corpi ha una rotazione, prima o dopo l'urto, i cambiamenti di velocità che essi sperimentano sono inversamente come le loro masse. Quando un corpo attrae un altro a distanza, quest' altro lo attrae con una forza eguale ed opposta.

66. Riterremo per ora come concesso, che l'azione scambievole tra due elementi possa in ogni caso immaginarsi composta di forze eguali ed opposte nella linea retta che li congiunge. Segue da ciò che la somma delle quantità di moto, parallele ad una direzione fissa, degli elementi di un sistema che influiscono l'uno sull'altro in qualunque modo possibile, rimane invariata dalla loro azione scambievole; e che la somma dei momenti delle quantità di moto di tutti gli elementi intorno ad una linea qualunque in una direzione fissa nello spazio, e condotta per un punto qualunque che si muove uniformemente in una linea retta in qualunque direzione, rimane costante. Dalla prima di queste proposizioni deduciamo che il centro d'inerzia di un sistema qualunque di elementi che s'influenzano scambievolmente, se in movimento, continua a muoversi uniformemente in una linea retta, a meno che la direzione o la velocità del suo movimento non sia cambiata da forze che agiscono scambievolmente tra gli elementi ed altra materia non appartenente al sistema; inoltre che il centro d'inerzia di un sistema qualunque di elementi si muove appunto come tutta la loro massa, se concentrata in un punto, si muoverebbe sotto l'influenza di forze eguali e parallele alle forze che realmente agiscono sulle sue diverse parti. Dalla seconda deduciamo che l'asse della rotazione risultante condotto pel centro d'inerzia di un sistema qualunque di elementi, o per un punto qualunque sia in riposo o in movimento uniforme in linea retta, rimane invariato in direzione, e la somma dei momenti delle quantità di moto intorno ad esso rimane costante se il sistema non esperimenta alcuna forza esteriore. (Questo principio è alle volte chiamato, molto impropriamente, *Conservazione delle Aree*). Questi risultati si dedurranno analiticamente nel Cap. XII.

67. Ciò che precede è fondato sui commenti dello stesso Newton alla sua terza legge, e le azioni e reazioni contemplate sono vere forze. Nello scolio aggiunto, egli stabilisce la seguente notevole proposizione, introducendo un'altra specificazione delle azioni e reazioni soggette alla sua terza legge.

Se l'Azione di un agente è misurata dalla sua intensità e dalla sua velocità insieme; e se, similmente, la Reazione della resistenza è misurata dalle velocità delle sue diverse parti e dalle loro diverse intensità insieme, sia che esse provengano da attrito, coesione, peso, o accelerazione; l'Azione e la Reazione, in tutte le combinazioni di macchine saranno eguali.

68. Newton qui accenna che le forze di resistenza contro l'accelerazione debbono calcolarsi come reazioni eguali ed opposte

alle azioni dalle quali è prodotta l'accelerazione. Così, se consideriamo un punto materiale qualunque di un sistema, la sua reazione contro l'accelerazione deve essere eguale ed opposta alla risultante delle forze che questo punto sperimenta, sia dalle azioni delle altre parti del sistema su di esso, o dall'influenza di materia non appartenente al sistema. In altre parole, esso deve essere in equilibrio con queste forze. Quindi il concetto di Newton equivale a questo, che tutte le forze del sistema, con le reazioni contro l'accelerazione dei punti materiali che lo compongono, formano gruppi di sistemi in equilibrio per questi punti considerati individualmente. Quindi, pel principio della sovraposizione delle forze in equilibrio, tutte le forze agenti sopra i punti del sistema formano, con le reazioni contro l'accelerazione, un sistema di forze in equilibrio sull'intero sistema. Questo è il celebre principio stabilito per la prima volta esplicitamente ed applicato molto utilmente da D'Alembert nel 1742 ed ancora conosciuto dal suo nome.

Newton nella proposizione testè citata pone, in un modo ammirabilmente distinto e conciso, i fondamenti della teoria astratta dell'*Energia*, che le recenti scoperte sperimentali hanno elevata alla posizione della più grande delle leggi fisiche conosciute. Egli accenna, però, solamente la sua applicazione alla meccanica. *L'azione dell'agente*, come egli la definisce, che è evidentemente equivalente al prodotto della componente effettiva della forza, per la velocità del punto sul quale essa agisce, è semplicemente nella moderna fraseologia, la ragione secondo la quale l'agente lavora. Pel soggetto che qui si tratta di misurare l'unità che è più generalmente conveniente è quella implicata nella definizione di Newton, cioè, la ragione di far lavoro in cui l'unità di energia è prodotta nell'unità di tempo.

69. Considerando le parole di Newton sotto questo aspetto, vediamo per l'Art. 46 che esse si possono logicamente convertire nella seguente forma.

« Il lavoro fatto in un sistema di corpi (secondo Newton, nelle parti di una macchina) ha il suo equivalente nel lavoro fatto contro l'attrito, le forze molecolari, o la gravità, se non vi è alcuna accelerazione; ma se vi è accelerazione, parte del lavoro è adoperato nel vincere la resistenza all'accelerazione, e l'energia cinetica addizionale sviluppata è equivalente al lavoro così speso. »

Quando parte del lavoro è fatto contro le forze molecolari, come nel piegare una molla, o contro la gravità, come nell'innalzare un peso; il rinculare della molla, e la caduta del peso,

sono capaci, ad ogni epoca posteriore, di riprodurre il lavoro originalmente speso (Art. 56). Ma ai giorni di Newton, e lnngo tempo dopo, si snpponeva che si *perdesse assolutamente* lavoro per l'attrito.

70. Se un sistema di corpi, dati in riposo o in movimento, non è influenzato da forze esteriori, la somma delle energie cinetiche di tutte le sue parti è aumentata in ogni tempo di una quantità eguale al lavoro fatto in quel tempo dalle forze scambievoli, che possiamo immaginare agenti tra i suoi punti. Quando le linee nelle quali queste forze agiscono rimangono tutte invariate in lunghezza, le forze non fanno lavoro, e la somma delle energie cinetiche dell'intero sistema rimane costante. Se, da un' altra parte, una di qneste linee varia in lunghezza durante il moto, le forze scambievoli in essa faranno lavoro, o consumeranno lavoro, secondo che la distanza varia con o contro esse.

71. L'esperimento ha mostrato che le forze scambievoli tra le parti di ogni sistema di corpi naturali fa sempre, o sempre consuma, la stessa quantità di lavoro durante un moto qualunque, col qnale il sistema può passare da nna particolare configurazione ad un'altra: sicchè ciascuna configurazione corrisponde ad una definita quantità di energia cinetica. Quindi nessnno ordinamento è possibile, nel quale si possa ottenere un guadagno di energia cinetica quando il sistema riprende la sua configurazione primitiva. In altri termini, « *il Moto Perpetuo è impossibile.* »

72. L'*energia potenziale* (Art. 56) di un tal sistema, nella configurazione che essa ha ad ogni istante, è la quantità di lavoro che le sue forze scambievoli fanno durante il passaggio del sistema da una qualunque configurazione scelta alla configurazione che ha al tempo al quale si riferisce. È generalmente conveniente di fissare in modo la particolare configurazione, scelta per lo zero della valutazione dell'energia potenziale, che l'energia potenziale in ogni altra configurazione praticamente considerata sia positiva.

Per porre ciò in una forma analitica, dobbiamo semplicemente notare che per quanto or ora si è detto, il valore di

$$\Sigma\int\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds$$

è indipendente dal cammino percorso dalla posizione iniziale alla finale, e quindi che

$$\Sigma\,(Xdx+Ydy+Zdz)$$

è un differenziale esatto. Se, in accordo con quello che si è detto, questo si chiami $-dV$, V è l'energia potenziale, ed

$$X_1 = -\frac{dV}{dx_1}, \ldots$$

Inoltre, per la seconda legge del moto, se m è la massa di un elemento del sistema di cui le coordinate sono x, y, z, abbiamo

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 \text{, etc.} = \text{etc.}$$

e

$$\Sigma\left\{m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\}dt$$

$$= \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = -dV.$$

L'integrale è

$$\frac{1}{2}\Sigma(mv^2) + V = C,$$

cioè, *la somma dell'energia cinetica e della potenziale è costante.* Ciò è detto la *Conservazione dell'Energia.*

CAPITOLO III.

Moto rettilineo.

73. Il caso più semplice del moto di un elemento che dobbiamo considerare è quello in linea retta. Questo può essere prodotto dalla forza applicata agente ad ogni istante nella direzione del moto; o pure si può supporre che l'elemento sia costretto a muoversi in una linea retta essendo rinchiuso in un tubo rettilineo di sezione infinitamente piccola. Come già si è menzionato, Art. 63, supporremo in ogni caso che la massa dell'elemento sia l'unità.

74. *Un elemento si muove in una linea retta, sotto l'azione di forze qualunque, di cui la risultante è in quella linea; determinare il movimento.*

Sia P la posizione dell'elemento al tempo t, f l'accelerazione risultante secondo OP, O essendo un punto fisso nella direzione del moto.

Sia $OP = x$, allora l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f.$$

In questa equazione f può essere data come una funzione di x, di $\frac{dx}{dt}$, o di t, o di due qualunque tra esse o di tutte e tre combinate; ma in ogni caso il primo ed il secondo integrale dell'equazione (se essi si possono ottenere) daranno $\frac{dx}{dt}$ ed x in termini di t; cioè, la posizione e la velocità dell'elemento ad ogni istante saranno conosciute.

Il solo di questi casi che ora considereremo è quello in cui f è data come una funzione di x; quelli in cui f è una funzione di $\frac{dx}{dt}$, o di $\frac{dx}{dt}$ ed x, essendo riservati per il Capitolo sul Movimento in un Mezzo resistente: mentre quelli in cui f contiene t esplicitamente offrono poco interesse.

La più semplice supposizione che possiamo fare è che f sia costante.

75. *Un elemento, spinto da un dato punto con una data velocità, è sollecitato da una forza costante nella linea del suo mo-*

vimento; determinare la posizione e la velocità dell'elemento ad ogni tempo.

Sia A la posizione iniziale dell'elemento, P la sua posizione al tempo t, v la sua velocità a quel tempo, ed f l'accelerazione costante della sua velocità. Si prenda un punto qualunque fisso O nella linea del movimento come origine, e sia $OA=a$, $OP=x$. L'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Integrando una volta, abbiamo

$$\frac{dx}{dt}=v=ft+C,$$

C essendo una costante da determinarsi con le circostanze iniziali del movimento. Supponiamo l'elemento spinto da A nella direzione positiva con velocità V, allora quando $t=0$, $v=V$; quindi $C=V$, e

$$\frac{dx}{dt}=v=V+ft \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Integrando di nuovo

$$x=C'+Vt+f\frac{t^2}{2}.$$

Ma quando $t=0$, $x=a$; quindi $C'=a$, ed

$$x=a+Vt+f\frac{t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Le equazioni (2) e (3) danno la velocità e la posizione dell'elemento in termini di t; e la velocità si può determinare in termini di x eliminando t tra esse: ma lo stesso risultato si otterrà più direttamente moltiplicando (1) per $\frac{dx}{dt}$ ed integrando. Ciò dà l'equazione dell'energia

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{v^2}{2}=C''+fx.$$

Ma quando $x=a$, $v=V$; quindi $C''=\frac{V^2}{2}-fa$, e

$$\frac{v^2}{2}=\frac{V^2}{2}+f(x-a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

76. Il caso più importante del moto di un elemento sotto l'azione di una forza costante nella sua linea di movimento è quello

in cui la forza è la gravità. Infatti i pesi dei corpi ad una data latitudine si possono considerare costanti a piccole distanze al di sopra della superficie della Terra, e quindi se dinotiamo con g la misura cinetica dell'attrazione terrestre, e consideriamo l'elemento spinto verticalmente in basso; le equazioni (2), (3), (4) dell'Art. 75 diventano

$$\left.\begin{aligned} v &= V + gt \\ x &= a + Vt + \frac{1}{2} gt^2 \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{V^2}{2} + g(x - a) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A),$$

x essendo misurato come sopra da un punto fisso O nella linea del moto. Come un esempio particolare supponiamo che l'elemento sia lasciato cadere dalla quiete in O. In quell'istante A coincide con O, ed $a=0$, $V=0$.

Quindi
$$v = gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$x = \frac{1}{2} gt^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
$$\frac{v^2}{2} = gx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

L'ultima di queste equazioni si può anche ottenere da

$$g = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

con una sola integrazione.

77. Come un altro esempio particolare, supponiamo che l'elemento sia spinto verticalmente in alto. Qui bisogna rammentare che se misuriamo x in su dal punto di proiezione, la forza tende a diminuire x e l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g.$$

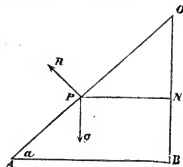
Pel resto la soluzione è la stessa. Prendendo, quindi, $a=0$ nelle equazioni (A) e cambiando il segno di g, otteniamo

$$v = V - gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$
$$x = Vt - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$
$$\frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2} - gx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Dall'equazione (4) vediamo che la velocità diminuisce conti-

nuamente, e diviene zero quando $t = \frac{V}{g}$; e da (6) che l'altezza corrispondente a $v = 0$, o la più grande altezza alla quale salirà l'elemento, è $\frac{V^2}{2g}$. Dopo ciò la velocità diviene negativa, o sia l'elemento incomincia a discendere, e (5) mostra che esso ritornerà al punto di proiezione quando $t = \frac{2V}{g}$, siccome x allora diviene 0; e la velocità con la quale esso ritorna a quel punto è, per (6), eguale alla velocità di proiezione.

78. *Un elemento discende per un piano inclinato levigato sotto l'azione della gravità, il movimento avendo luogo in un piano verticale perpendicolare all' intersezione dell' inclinato con un piano orizzontale qualunque; determinare il movimento.*

Sia P la posizione dell'elemento al tempo t sul piano inclinato OA, $OP = x$ la sua distanza da un punto fisso O nella linea del

moto, e sia α l'inclinazione di OA alla linea orizzontale AB. La sola forza impressa sull'elemento è il suo peso g che agisce verticalmente in basso, e questa si può risolvere in due, $g \operatorname{sen} \alpha$ secondo, e $g \cos \alpha$ perpendicolare ad, OA. Oltre queste vi è la forza ignota R, la reazione del piano, la quale è perpendicolare ad OA: ma nè questa nè la componente $g \cos \alpha$ può influire sul movimento lungo il piano. L'equazione del movimento è quindi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \operatorname{sen} \alpha ,$$

la soluzione della quale, siccome $g \operatorname{sen} \alpha$ è costante, è inclusa in quella della proposizione nell'Art. 76, e tutt'i risultati per gli elementi che si muovono verticalmente sotto l'azione della gravità si applicheranno ad essa scrivendo $g \operatorname{sen} \alpha$ per g. Così, se

l'elemento parte dalla quiete in O, otteniamo dalle equazioni (1), (2), (3) dell'Art. 76 con questo mezzo,

$$v = g \operatorname{sen} \alpha \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$x = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$\frac{v^2}{2} = g \operatorname{sen} \alpha \cdot x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

79. L'equazione (3) dimostra una proprietà importante riguardo alla velocità acquistata in ogni punto della discesa. Infatti, si tiri PN parallela ad AB, che incontri la linea verticale per O in N, allora se v è la velocità in P, abbiamo

$$\frac{v^2}{2} = g \operatorname{sen} \alpha \cdot OP$$
$$= g \cdot ON.$$

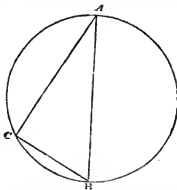
Paragonando questa con l'equazione (3) dell'Art. 76, vediamo che la velocità in P è l'istessa di quella che un elemento acquisterebbe cadendo liberamente dalla quiete per la distanza verticale ON; in altri termini la velocità in ogni punto, di un elemento che discende per un piano inclinato levigato, è quella dovuta all'altezza verticale per la quale esso è disceso; un caso particolare della conservazione dell'energia.

80. Inoltre da (2) deriviamo immediatamente il seguente curioso ed utile risultato.

I tempi della discesa per tutte le corde tirate dal punto più alto o più basso di un circolo verticale sono eguali.

Sia AB il diametro verticale del circolo, AC una corda qua-

lunque per A; si congiunga BC; allora se T è il tempo della di-

scesa per AC, abbiamo dall'equazione (2) dell'Art. 78,

$$AC = \frac{1}{2} gT^2 \cos BAC.$$

Ma $AC = AB \cos BAC$; onde

$$AB = \frac{1}{2} gT^2 ,$$

o

$$T = \sqrt{\frac{2AB}{g}},$$

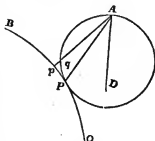
che, essendo indipendente dalla posizione della corda, dà lo stesso tempo di discesa per tutte.

Si può mostrare similmente che il tempo della discesa per tutte le corde tirate per B è lo stesso. In fatti le corde parallele, tirate per A e B rispettivamente, sono di lunghezze eguali.

Per trovare la linea retta di più celere discesa ad una curva data da un punto qualunque nello stesso piano verticale, tutto ciò che si richiede si è di descrivere un circolo che abbia il punto dato per l'estremità superiore del suo diametro verticale, ed il più piccolo che possa incontrare la curva. Quindi se BC è la curva, A il punto, si tiri AD verticale; e, col centro in AD, si descriva un circolo che passi per A e tocchi BC. Sia P il punto di contatto, allora AP è la linea richiesta. Infatti, se prendiamo un altro punto qualunque p, in BC, Ap intersega il circolo in un punto q, ed il tempo della discesa per $Ap >$ tempo per Aq, cioè, $>$ tempo per AP.

Se la curva data non è piana, si deve descrivere una sfera che passi per A, col centro in AD, in modo che tocchi la curva; e la dimostrazione è precisamente come sopra.

81. *Quando un elemento si muove sotto l'azione di una forza nella sua linea di movimento, la forza variando direttamente come la distanza dell'elemento da un punto fisso in quella linea, determinare il movimento.*

Sia O il punto fisso, P la posizione dell'elemento al tempo t, v la sua velocità a quel tempo, e sia $OP = x$. Allora se μ è l'accelerazione di un elemento all'unità di distanza da O, la quale si suppone conosciuta, l'accelerazione in P sarà μx, e se essa è

diretta verso O tenderà a diminuire x. Perciò l'equazione del movimento è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x,$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0, \text{ .... } (1).$$

Moltiplicando questa equazione per $\frac{dx}{dt}$, ed integrando, otteniamo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{2}(A^2 - x^2) \text{ .... } (2),$$

l'equazione dell'energia. Questa si può scrivere

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{1}{\sqrt{(A^2 - x^2)}};$$

essendo impiegato il segno negativo se supponiamo che il movimento sia verso O, ed A essendo la costante introdotta nell'integrazione. Integrando di nuovo,

$$\sqrt{\mu}t + B = \cos^{-1}\frac{x}{A};$$

o

$$x = A\cos\{\sqrt{\mu}t + B\} \text{ .... } (3),$$

l'integrale completo di (1), che racchiude due costanti arbitrarie A e B, i valori delle quali si debbono determinare per mezzo della distanza iniziale, e della velocità di proiezione. Così da (3),

$$\frac{dx}{dt} = v = -\sqrt{\mu}A\,\text{sen}\{\sqrt{\mu}t + B\} \text{ .... } (4).$$

82. Supponiamo che l'elemento sia spinto da A nella direzione positiva con la velocità V, e sia $OA = a$; allora quando $t = 0$, abbiamo $x = a$, $v = V$; e quindi da (3) e (4)

$$a = A\cos B$$

$$V = -\sqrt{\mu}A\,\text{sen}\,B,$$

che determinano A e B, ed allora (3) e (4) danno la posizione e la velocità dell'elemento ad ogni istante. La velocità in termini di x si ottiene direttamente da (2), poichè quando $x = a$, abbiamo $v = V$; onde $V^2 = \mu(A^2 - a^2)$, e

$$v^2 = V^2 + \mu(a^2 - x^2).$$

83. Le equazioni (3) e (4) danno valori periodici di x e v, tali che tutte le circostanze del movimento sono le stesse al tempo $t+\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ come al tempo t. Esse mostrano ancora che la velocità diviene zero quando $\sqrt{\mu}t+B=0$, e che il valore corrispondente di x è il più grande possibile. Quindi l'elemento si muoverà nella direzione positiva sino alla distanza A da O, e poi incomincerà a ritornare. Inoltre, siccome quando $\sqrt{\mu}t+B=\pi$, abbiamo $v=0$ di nuovo, ed $x=-A$, esso passerà per O, si muoverà sino ad un'eguale distanza dall'altra parte, e così di seguito: il tempo di una completa oscillazione, cioè, il tempo dal suo lasciare un punto qualunque sino a che esso passi di nuovo per lo stesso punto nella stessa direzione, essendo $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. Questo risultato è rimarchevole, poichè mostra che il tempo dell'oscillazione è indipendente dalla velocità e dalla distanza di proiezione, e dipende solamente dall'intensità della forza.

La proposizione precedente include il movimento di un elemento nell'interno di una sfera omogenea di materia ordinaria, in un foro rettilineo verso il centro. Infatti l'attrazione di una tale sfera sopra un elemento nel suo interno è proporzionale alla distanza dal centro, e l'equazione del movimento è perciò la stessa di quella che abbiamo ora considerata.

84. Supponiamo che O stesso sia in movimento nella linea OA, e dinoti ξ la sua posizione al tempo t. L'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu(x-\xi),$$

ed è integrabile quando ξ è data in termini di t. Questa si può cambiare immediatamente nell'equazione del moto relativo

$$\frac{d^2(x-\xi)}{dt^2}=-\mu(x-\xi)-\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

che è la stessa come quando il punto O è in quiete se $\frac{d^2\xi}{dt^2}=0$, cioè se la velocità di O è costante. Se O si muove con accelerazione costante, α, il moto oscillatorio sarà lo stesso come sopra, ma la posizione media sarà $\frac{\alpha}{\mu}$ indietro ad O.

85. Se la forza nell'Art. 81 si suppone ripulsiva o diretta sempre dal centro e non verso di esso, l'equazione del moto diviene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x,$$

l'integrale della quale si conosce che è

$$x = Ae^{\sqrt{\mu}t} + Be^{-\sqrt{\mu}t};$$

ed il movimento non è oscillatorio. Se, quando $t=0$, e $x=B$, $v=-B\sqrt{\mu}$, l'elemento si avvicina costantemente al centro ma non lo raggiunge giammai.

86. Si deve osservare che non possiamo applicare sempre la stessa equazione del moto al lato positivo ed al negativo dell'origine come abbiamo fatto nel caso dell'Art. 81. L'aver potuto fare così nasce dal fatto che l'espressione, μx, della forza cambia segno con x; infatti considerando la figura si vedrà che quando x è negativa la forza tende ad aumentare x algebricamente, e l'equazione si dovrebbe propriamente scrivere

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +\mu(-x).$$

In generale, quando la forza è proporzionale all'n^{ma} potenza della distanza, le equazioni del moto per i lati positivo e negativo dell'origine sono rispettivamente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x^n,$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu(-x)^n.$$

I soli casi, perciò, in cui la stessa equazione del movimento si applicherà ai due lati dell'origine, si hanno quando n è della forma $\frac{2m+1}{2m'+1}$, in cui m ed m' sono numeri interi qualunque incluso zero, poichè è solamente in questi casi che abbiamo

$$-(-x)^n = x^n.$$

87. In tutti gli altri casi l'investigazione del movimento consisterà generalmente di due parti, una per ciascun lato dell'origine; ed in un caso anche quando n è della forma $\frac{2m+1}{2m'+1}$ è necessario considerare queste parti separatamente, poichè la forma

dell' integrale non è sufficientemente generale per includerle entrambe. Questo è quando $m=0$ ed $m'=-1$, poichè in quel caso l'equazione del moto diviene

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\mu}{x}.$$

Moltiplicando questa per $2\frac{dx}{dt}$ ed integrando abbiamo

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=C-2\mu\log x\,,$$

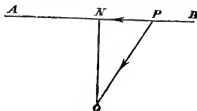
che diviene impossibile quando x è negativo. Ma è evidente che possiamo allora scrivere l'integrale

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=C-2\mu\log(-x)\,,$$

che è, naturalmente, la forma propria per il lato negativo dell'origine. Queste equazioni generalmente non si possono integrare ulteriormente, ma mostreremo verso la fine del Capitolo come si possa determinare il tempo per giungere all'origine.

88. *Un elemento, obbligato a muoversi in una linea retta, è sollecitato da una forza diretta sempre ad un punto fuori della linea, e variando direttamente come la distanza dell' elemento da quel punto, determinare il moto.*

L'obbligo qui contemplato si può concepire considerando l'elemento o come un anello infinitamente piccolo che scorre su di una verga levigata, o come un elemento materiale che si muove in un tubo rettilineo levigato di sezione infinitamente piccola.

Sia AB la linea retta, P la posizione dell'elemento ad un

tempo qualunque, O il punto al quale la forza in P è sempre diretta. Si tiri ON perpendicolare ad AB, e sia $NP=x$; allora se $OP=r$, e se μ come prima è l'accelerazione all'unità di distanza, l'accelerazione di P secondo PO è μr. Questa si può risolvere

in due, l'una secondo e l'altra perpendicolare ad AB, delle quali la seconda non ha alcun effetto sul moto dell'elemento. L'equazione del moto è, quindi, poichè l'accelerazione è $\mu r \cos OPN$ o μPN,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x ,$$

la stessa come nell'Art. 81. Il moto dell'elemento sarà perciò oscillatorio intorno ad N, il tempo di una completa oscillazione essendo $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, e tutte le circostanze del movimento saranno le stesse come per un elemento libero che si muova in AB sotto l'azione di un eguale centro di forza posto in N.

89. *Un elemento si muove in una linea retta sotto l'azione di una forza diretta sempre ad un punto in quella linea, e variando inversamente come il quadrato della distanza da quel punto; determinare il moto.*

Sia O il punto fisso, P la posizione dell'elemento al tempo t, $OP=x$; l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^2} ;$$

μ essendo, come sopra, l'accelerazione all'unità di distanza da O.

Moltiplicando per $\frac{dx}{dt}$ ed integrando, abbiamo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{2} = C + \frac{\mu}{x} ,$$

l'equazione dell'energia.

Supponiamo che l'elemento parta dalla quiete in un punto A alla distanza a da O, allora quando $x=a$, $v=0$; quindi,

$$C = -\frac{\mu}{a} ,$$

ed

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{2} = \mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

che dà la velocità dell'elemento ad una distanza qualunque x dall'origine. Inoltre da (1)

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{a-x}{ax}} ,$$

essendo preso il segno negativo, poichè nel movimento verso

O, x diminuisce al crescere di t. Questa dà

$$\frac{dt}{dx} = -\sqrt{\frac{a}{2\mu}} \cdot \frac{x}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{a-2x}{\sqrt{(ax-x^2)}} - \frac{a}{2} \frac{1}{\sqrt{(ax-x^2)}} \right\}.$$

Integrando, abbiamo

$$t = \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \cdot \left\{ \sqrt{(ax-x^2)} - \frac{a}{2} \text{vers}^{-1} \frac{2x}{a} + C' \right\}.$$

Ora, quando $t=0$, $x=a$, e perciò $C' = \frac{\pi a}{2}$.

Quindi $\sqrt{\frac{2\mu}{a}}\, t = \sqrt{(ax-x^2)} - \frac{a}{2} \text{vers}^{-1} \frac{2x}{a} + \frac{\pi a}{2}$,

che è la relazione tra x e t.

90. Ponendo $x=0$, troviamo che il tempo per arrivare ad O è

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^3}{2\mu}},$$

ed (1) mostra che la velocità in O è infinita. Per questo riguardo ci s'impedisce l'applicazione delle nostre formole a determinare il movimento dopo l'arrivo in O; ma si deve osservare che, sebbene in ogni punto molto vicino ad O vi sia una grandissima forza che tende verso O, nello stesso punto O non vi è alcuna forza affatto: e quindi l'elemento, avvicinandosi al centro di forza con una velocità infinitamente grande, deve passare per esso. Inoltre, ogni cosa essendo la stessa ad eguali distanze dall'una e dall'altra parte del centro, vediamo che il movimento deve essere frenato così rapidamente come fu generato, e quindi l'elemento procederà ad una distanza dall'altra parte di O eguale a quella dalla quale partì. Il movimento continuerà quindi in modo oscillatorio.

91. Il suddetto caso di movimento include quello di un corpo che cade da una grande altezza al di sopra della superficie della Terra. Infatti una sfera attrae un elemento esterno con una forza che varia inversamente come il quadrato della distanza dell'elemento dal suo centro, e quindi se x è la distanza di un corpo dal centro della Terra, R il raggio terrestre, e g la misura cinetica

della gravità sull' unità di massa alla superficie della Terra, l'equazione del moto sarà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{R^2}{x^2},$$

la stessa equazione come sopra, se scriviamo μ per gR^2. I risultati testè ottenuti si applicheranno perciò a questo caso. Così se vogliamo trovare la velocità che un corpo acquisterebbe nel cadere sulla superficie della Terra da un'altezza h al di sopra di essa, abbiamo da (1), ponendo $\mu = gR^2$,

$$\frac{v^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R+h}\right);$$

e quindi se V è la velocità quando $x = R$, cioè, la velocità richiesta,

$$\frac{1}{2}V^2 = gR\frac{h}{R+h}.$$

Se h è piccola in paragone di R, questa si può scrivere

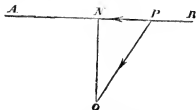
$$\frac{1}{2}V^2 = gh\left(1 - \frac{h}{R} + \text{etc.}\right)$$

dalla quale vediamo il valore dell'errore introdotto dalla formola ordinaria, Art. 76,

$$\frac{1}{2}V^2 = gh.$$

Se la caduta è da una distanza infinita, $h = \infty$, ed abbiamo

$$\frac{1}{2}V^2 = gR.$$

92. *Un elemento è costretto a muoversi in una linea retta, ed è sollecitato da una forza, diretta sempre ad un punto fuori di quella linea, e variando inversamente come il quadrato della distanza da quel punto; determinare il movimento.*

Sia AB la linea retta, P la posizione dell'elemento ad un tem-

po qualunque, O il punto al quale la forza è sempre diretta, μ

l'accelerazione all'unità di distanza. Si tiri ON perpendicolare ad AB e sia $ON=b$, $NP=x$; allora l'accelerazione di P secondo PO è $\frac{\mu}{PO^2}$, e, come nell'Art. 88, la sola parte di questa che produce il moto è la parte risoluta secondo PN. Quindi l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{OP^2}\cos OPN$$

$$= -\frac{\mu x}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Moltiplicando per $2\frac{dx}{dt}$ ed integrando, abbiamo

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = C + \frac{2\mu}{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}},$$

in cui C si deve determinare nel modo solito.

93. Questa equazione generalmente non si può integrare ulteriormente, ma in questo ed in ogni simile caso l'integrazione si può effettuare se supponiamo x sempre molto piccolo. Supponiamo che l'elemento sia stato in quiete in N, e sia stato leggermente spostato da questa posizione di equilibrio, lo spostamento essendo così piccolo che durante il moto $\frac{x^2}{b^2}$ si possa trascurare in paragone di $\frac{x}{b}$. Abbiamo da (1),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{b^3}\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{\mu x}{b^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{x^2}{b^2}+\text{etc.}\right)$$

$$= -\frac{\mu x}{b^3} \text{ approssimativamente:}$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{b^3} = 0,$$

la stessa forma dell'equazione del moto come quella dell'Art. 81. Il movimento sarà perciò oscillatorio, il tempo di ciascuna piccola oscillazione essendo $2\pi\sqrt{\frac{b^3}{\mu}}$.

94. *Un elemento si muove in una linea retta sotto l'azione di una forza che varia inversamente come l' n^{ma} potenza della distanza dell'elemento da un punto fisso in quella linea; determinare il movimento.*

Misurando x come sopra, l'equazione del moto sarà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^n}.$$

Moltiplicando per $2\frac{dx}{dt}$ ed integrando, abbiamo

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = C + \frac{2}{n-1}\frac{\mu}{x^{n-1}}.$$

Supponiamo che l'elemento parta dalla quiete ad una distanza a dal punto fisso; allora quando $x=a$, $v=0$; quindi

$$C = -\frac{2}{n-1}\frac{\mu}{a^{n-1}};$$

e

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{2\mu}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right) \dots\dots\dots\dots (1).$$

95. Questa equazione generalmente non può essere integrata ulteriormente, ma se supponiamo che l'elemento sia partito da un punto ad una distanza infinita, abbiamo $a=\infty$, e

$$v^2 = \frac{2\mu}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}},$$

in cui v è la velocità dall'infinito, alla distanza x.

Abbiamo perciò in questo caso particolare

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2\mu}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}},$$

o

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}.$$

Integrando questa tra i limiti $x=\alpha$, $x=\beta$, abbiamo per il tempo per passare da $x=\alpha$ ad $x=\beta$,

$$T = \frac{2}{n+1}\left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{n+1}{2}} - \beta^{\frac{n+1}{2}}\right).$$

96. Se sviluppiamo (1) in serie, otteniamo

$$\frac{dt}{dx} = -\left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^{2n-2}}{a^{2n-2}}+\text{etc.}\right).$$

Integrando tra i limiti $x=a$, $x=0$, abbiamo per il tempo della caduta al centro da una distanza a l'espressione

$$\left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} 2a^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{3n-1}+\text{etc.}\right),$$

il quale quindi varia per differenti distanze come $a^{\frac{n+1}{2}}$.

O, meglio, così. Si ponga $\frac{x}{a}=z$, ed abbiamo, per il tempo della caduta al centro dalla quiete alla distanza a, l'espressione

$$\left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}}\int_0^1 \frac{z^{\frac{n-1}{2}}dz}{(1-z^{n-1})^{\frac{1}{2}}} = \left\{\frac{1}{2\mu(n-1)}\right\}^{\frac{1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} F\left\{\frac{n+1}{2(n-1)}, \frac{1}{2}\right\},$$

in cui F è « il primo integrale euleriano ».

97. La soluzione precedente è in difetto quando $n=1$, ma il tempo della caduta al centro si può trovare come segue. L'equazione per questo caso, come è data nell'Art. 87, è

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C - 2\mu\log x$$

$$= 2\mu\log\frac{a}{x},$$

poichè quando $x=a$, $\frac{dx}{dt}=0$. Quindi,

$$\sqrt{2\mu}\,\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\log\frac{a}{x}}},$$

essendo preso il segno negativo poichè x diminuisce al crescere

di t. Si ponga T per il tempo richiesto, allora

$$\sqrt{2\mu}\, T = -\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{\log\frac{a}{x}}}.$$

Per trasformare quest'integrale, si ponga $\sqrt{\log\frac{a}{x}} = y$. Allora abbiamo

$$x = ae^{-y^2},\ \text{e}\ \frac{dx}{dy} = -2ae^{-y^2}y,$$

ed i limiti di y sono 0 ed ∞. Quindi

$$\sqrt{2\mu}\cdot T = 2a\int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

il quale (pel Calcolo integrale)

$$= 2a\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Quindi $$T = a\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}},$$

ed è perciò direttamente come lo spazio percorso.

98. *Un elemento è costretto a muoversi in una linea retta, ed è sollecitato da una forza diretta ad un punto fuori di quella linea, ed espressa da una funzione* $\varphi(r)$ *della distanza; determinare il tempo di una piccola oscillazione.*

Impiegando la stessa notazione come nell'Art. 92, l'accelerazione secondo PO essendo $\varphi(r)$, la sua componente secondo PN è $\varphi(r)\frac{x}{r}$; quindi l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi(r)\frac{x}{r}.$$

Ma $$r = \sqrt{(b^2+x^2)} = b\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}$$

$$= b \text{ prossimamente.}$$

Quindi $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\varphi(b)}{b}x = 0,$$

e quindi per l'Art. 83, il tempo di una piccola oscillazione è

$$2\pi\sqrt{\frac{b}{\varphi(b)}}.$$

ESEMPII.

1. Un corpo è lanciato verticalmente in su con una velocità che lo farà salire all'altezza di $2g$ metri; mostrare che dopo tre secondi esso discenderà con una velocità g.

2. Trovare la posizione di un punto sulla circonferenza di un circolo verticale, affinchè il tempo della discesa rettilinea da esso al centro sia lo stesso che il tempo della discesa al punto più basso.

3. La linea retta per la quale un elemento scenderà nel più breve tempo da un dato punto ad un dato circolo nello stesso piano verticale, è la linea che congiunge il punto all'estremità superiore o inferiore del diametro verticale, secondo che il punto è dentro o fuori del circolo.

4. Trovare il luogo di tutt'i punti dai quali il tempo della discesa rettilinea a ciascuno di due punti dati è lo stesso. Mostrare ancora che nel caso particolare in cui i punti dati sono nella stessa verticale, il luogo è formato dalla rotazione di un'iperbole rettangolare.

5. Trovare la linea della più celere discesa dal fuoco ad una parabola il di cui asse è verticale ed il vertice in sopra, e mostrare che la sua lunghezza è eguale a quella del lato retto.

6. Trovare la linea retta della più celere discesa dal fuoco di una parabola alla curva quando l'asse è orizzontale.

7. Il luogo di tutt'i punti nello stesso piano verticale per i quali il minimo tempo della discesa per un piano inclinato ad un circolo è costante è un altro circolo.

8. Due corpi scendono nello stesso tempo da due punti dati nello spazio nella stessa verticale per due linee rette condotte ad un punto qualunque di una superficie, mostrare che la superficie è un iperboloide equilatero di rotazione, avente i punti dati per vertici.

9. Trovare la forma di una curva in un piano verticale, tale che se degli elementi pesanti si fanno cadere simultaneamente da ciascun suo punto in modo da scendere liberamente secondo la normale in quel punto, essi pervengano ad una data linea retta orizzontale nello stesso istante.

10. Una semicicloide è situata col suo asse verticale ed il vertice in giù, e da diversi suoi punti si fanno cadere più elementi

nello stesso istante, ciascuno scendendo per la tangente nel punto dal quale parte, dimostrare che essi giungeranno all'involuta (che passa pel vertice) tutti nello stesso istante.

11. Un elemento si muove in una linea retta sotto l'azione di una forza che varia inversamente come la $\left(\frac{3}{2}\right)^{ma}$ potenza della distanza, mostrare che la velocità acquistata cadendo da una distanza infinita alla distanza a dal centro è eguale alla velocità che si acquisterebbe partendo dalla quiete alla distanza a sino alla distanza $\frac{a}{4}$.

12. Un elemento si muove in linea retta da una distanza a verso un centro di forza, la forza variando inversamente come il cubo della distanza; mostrare che l'intero tempo della discesa

$$=\frac{a^2}{\sqrt{\mu}}.$$

13. Un elemento è posto in un dato punto tra due centri di forza di eguale intensità che attraggono direttamente come la distanza; determinare il movimento ed il tempo di una oscillazione.

Sia $2a$ la distanza tra i centri, x la distanza dell'elemento in un tempo qualunque dal punto medio tra essi, allora l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu(a+x)+\mu(a-x)$$
$$=-2\mu x.$$

Quindi, il tempo di un'oscillazione $=\frac{\pi}{\sqrt{(2\mu)}}$.

14. Se un elemento incomincia a muoversi direttamente verso un centro fisso che respinge con una forza $=\mu$ (distanza), e con una velocità iniziale $=\mu^{\frac{1}{2}}$ (distanza iniziale), dimostrare che esso si avvicinerà continuamente al centro fisso, ma non lo raggiungerà giammai.

15. Un elemento sollecitato da due centri di forza, ciascuno attraendo con una intensità che varia inversamente come il quadrato della distanza, è lanciato da un punto dato tra essi, trovare la velocità di proiezione affinchè l'elemento possa giungere appunto al punto neutrale di attrazione e rimanere quivi in riposo.

Se μ, μ' sono le forze assolute dei centri; a_1, a_2 le distanze

del punto di proiezione da essi; e V la velocità iniziale; abbiamo

$$V^2 = \frac{(\sqrt{\mu a_2} - \sqrt{\mu' a_1})^2}{a_1 a_2 (a_1 + a_2)}.$$

16. Supponendo la Terra uno sferoide omogeneo di equilibrio, il tempo della discesa di un corpo fatto cadere da un punto qualunque P sulla superficie attraverso un foro sino al centro C, varia come CP, e la velocità al centro è costante.

17. Un elemento materiale posto ad un centro di attrazione che varia come la distanza, è sollecitato partendo dalla quiete da una forza costante che agisce per un sesto del tempo di una completa oscillazione intorno al centro, cessa per lo stesso periodo, e poi agisce come prima; mostrare che l'elemento sarà allora ritenuto in riposo, e che gli spazii percorsi nei due periodi sono eguali.

18. Un corpo si muove partendo dalla quiete ad una distanza a verso un centro di forza, la forza variando inversamente come la distanza; mostrare che il tempo per descrivere lo spazio tra βa e $\beta'' a$ sarà un massimo se $\beta = \frac{1}{n^{\frac{1}{2(n-1)}}}$.

19. Se il tempo della discesa di un corpo in una linea retta verso un dato centro di forza varia inversamente come il quadrato della distanza della caduta, determinare la legge della forza.

20. Supponendo che la velocità di un corpo cadente ad un centro di forza sia come $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, in cui a è la distanza iniziale ed x la distanza variabile del centro, trovare la legge della forza.

21. Trovare il tempo della caduta al centro quando la forza è come $(\text{dist})^{-\frac{5}{3}}$.

22. Mostrare che il tempo della discesa, ad un centro di forza come $(\text{dist})^{-2}$, per la prima metà della distanza iniziale, sta a quello per l'altra metà come $\pi+2 : \pi-2$.

23. Un elemento discende ad un centro di forza come $(\text{dist})^n$. Trovare n in modo che la velocità acquistata dall'infinito alla distanza a, sia eguale a quella acquistata dalla distanza a alla distanza $\frac{1}{4} a$, dal centro.

24. Un elemento è situato all'estremità dell'asse di un sottile

cilindro attraente di lunghezza infinita e di raggio a, mostrare che la sua velocità dopo di aver descritto uno spazio x è proporzionale a

$$\sqrt{\log\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}}.$$

25. Un elemento cade ad un solido omogeneo infinito limitato da una faccia piana, trovare il tempo della discesa.

26. Ogni punto di un sottile anello uniforme repelle con una forza come $(\text{dist})^{-2}$, trovare il tempo di una piccola oscillazione nel suo piano, intorno al centro.

27. Mostrare che un corpo non si può muovere in modo che la velocità varii come lo spazio dal principio del moto. E se la velocità varia come la radice cubica di quello spazio, determinare la forza, ed il tempo per descrivere un dato spazio.

28. Mostrare che il tempo della più celere discesa per una corda focale di una parabola il cui asse è verticale è

$$\sqrt{\frac{3^{\frac{3}{2}}l}{g}},$$

dove l è il lato retto.

29. Un'ellisse è sospesa col suo asse maggiore verticale, trovare il diametro pel quale un elemento cadrà nel minimo tempo, ed il valore limite dell'eccentricità affinchè questo non sia l'asse maggiore stesso.

30. Degli elementi scendono per corde da un punto O ad una superficie curva, sotto l'azione di un piano di cui l'attrazione è come la distanza, ed essi pervengono alla superficie nello stesso tempo; mostrare che la superficie è generata dalla rotazione (intorno ad una linea di cui la lunghezza è a condotta per O perpendicolare al piano) della curva di cui l'equazione polare intorno ad O è

$$\rho\cos\theta = a\,\{1-\cos(k\cos\theta)\}.$$

31. Se gli elementi incominciano il loro movimento alla superficie, e giungono in O dopo un dato tempo, l'equazione della curva generatrice è

$$\rho\cos\theta = a\,\{\sec(k\cos\theta)-1\}.$$

32. Dimostrare che i tempi della caduta per un dato spazio AC verso un centro di forza S, sotto l'azione di due forze, una delle quali varia come la distanza, e l'altra è costante ed eguale al va-

lore originale della prima, sono come l'arco (il di cui seno verso è AC) alla corda, in un circolo il di cui raggio è AS.

33. La terra essendo supposta un sottile strato sferico uniforme, nella superficie del quale sia fatta un'apertura circolare di dato raggio, se un elemento è lasciato cadere dal centro dell'apertura, determinare la sua velocità in un punto qualunque della discesa.

34. Se un elemento scende per un raggio di un circolo sotto l'azione di una forza come $(D)^3$ nel centro, e sale pel raggio opposto sotto l'azione della stessa forza supposta ripulsiva, mostrare che esso acquisterà una velocità che è il medio geometrico tra il raggio e la forza alla circonferenza.

35. Se un elemento cade ad un centro di forza come (D); determinare la forza costante che produrrebbe l'effetto nello stesso tempo, e paragonare le velocità finali.

36. Trovare l'equazione di una curva per ciascuna tangente della quale un elemento scenderebbe all'asse orizzontale in un dato tempo.

37. Una sfera è composta di un numero infinito di elementi liberi, egualmente distribuiti, che gravitano tra loro senza urtarsi; supponendo che gli elementi non abbiano alcuna velocità iniziale, dimostrare che la densità media intorno ad un elemento varierà inversamente come il cubo della sua distanza dal centro.

38. Dimostrare che se PQ è una corda di più celere discesa da una curva in un piano verticale ad un'altra, le tangenti in P e Q sono parallele e PQ biseca gli angoli tra le normali e la verticale.

39. Se un elemento P parte dalla quiete sotto l'azione di una forza tendente ad un punto S misurata dall'accelerazione $n^2 SP$, determinare il tempo da quiete a quiete; e mostrare che, se una piccola forza costante il cui effetto ritardatore è $=f$ agisce per una porzione del cammino estendentesi egualmente da ciascun lato di S, il tempo sarà inalterato, e la diminuzione dell'ampiezza di una oscillazione sarà $\frac{2f}{n^2}\cos n\tau$, τ essendo il tempo in cui incomincia la perturbazione.

40. Un filo sottile che ha due pesi ciascuno eguale a P sospesi alle sue estremità pende da due caviglie levigate nella stessa linea orizzontale; un peso Q è legato al punto medio della porzione del filo tra le caviglie, e può discendere pel suo peso; mo-

strare che la velocità di Q ad ogni profondità x al di sotto della linea orizzontale è

$$\sqrt{x^2 + a^2} \sqrt{\frac{2g\,(Qx + 2Pa - 2P\sqrt{x^2 + a^2})}{Q\,(x^2 + a^2) + 2Px^2}}.$$

41. Un filo elastico ha i suoi estremi legati alle estremità di una verga di eguale lunghezza. Il punto medio del filo è fermo, ed in quel punto è posto un centro di forza che repelle ogni elemento della verga con una forza $= \frac{\mu}{(\text{dist})^2}$. La verga si muove allora parallelamente a sè stessa per una distanza eguale alla metà della sua lunghezza. Se in questa posizione l'elasticità del filo è tale che la verga sia in equilibrio, mostrare che se si sposta di poco perpendicolarmente alla sua lunghezza, il tempo di una piccola oscillazione

$$= 4\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu\,(5 + \sqrt{2})}}.$$

CAPITOLO IV.

Moto Parabolico.

99. In questo capitolo intendiamo di trattare principalmente del movimento di un elemento libero che è soggetto all'azione di forze la di cui risultante è parallela ad una data linea fissa.

Il caso più semplice naturalmente sarà quando quella risultante è costante. Il problema allora diviene la determinazione del movimento di un proiettile nel vuoto, poichè l'attrazione della terra si può considerare entro limiti moderati come costante e parallela ad una linea fissa. Questo ora considereremo.

100. *Un elemento libero si muove sotto l'azione di una forza verticale di cui la grandezza è costante, determinare la forma della traiettoria, e le circostanze della sua descrizione.*

Prendendo l'asse delle x orizzontale nel piano verticale e nel senso della proiezione, e quello delle y verticalmente in su, è evidente che l'elemento continuerà a muoversi nel piano delle xy, essendo proiettato in esso, e non soggetto ad una forza che tende a farlo uscire da quel piano.

Le equazioni del moto sono allora (p. 280)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\,g\,,$$

se g è la misura cinetica della forza.

Supponiamo che il punto dal quale l'elemento è proiettato si prenda per origine, che la velocità di proiezione sia V, e che la direzione della proiezione faccia un angolo α con l'asse delle x.

Il primo ed il secondo integrale delle equazioni precedenti saranno allora

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\alpha\,, \quad \frac{dy}{dt} = V\,\text{sen}\,\alpha - gt \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

$$x = V\cos\alpha\cdot t, \quad y = V\,\text{sen}\,\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \;\ldots\ldots (2).$$

Queste equazioni danno le coordinate dell'elemento e la sua velocità parallela a ciascun asse per ogni valore assegnato del tempo.

Eliminando t tra le equazioni (2) otteniamo l'equazione della traiettoria,

$$y = x \tan\alpha - \frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

la quale mostra che l'elemento si muoverà in una parabola con l'asse verticale, ed il vertice in su.

101. L'equazione (3) si può scrivere

$$x^2 - \frac{2V^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g}x = -\frac{2V^2\cos^2\alpha}{g}y,$$

o $$\left(x - \frac{V^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 = -\frac{2V^2\cos^2\alpha}{g}\left(y - \frac{V^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g}\right).$$

Paragonando questa con l'equazione di una parabola riferita al suo vertice come origine, troviamo per le coordinate x_0, y_0 del vertice

$$x_0 = \frac{V^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g}, \quad y_0 = \frac{V^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g}.$$

Quindi otteniamo l'equazione della direttrice

$$y = y_0 + \frac{1}{4}\,(\text{parametro}) = \frac{V^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g} + \frac{V^2\cos^2\alpha}{2g} = \frac{V^2}{2g}.$$

Ora se v è la velocità dell'elemento in un punto qualunque della sua traiettoria,

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, && \text{o per (1)} \\ &= (V^2\cos^2\alpha) + (V^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2Vg\operatorname{sen}\alpha\cdot t + g^2t^2) \\ &= V^2 - 2g\left(V\operatorname{sen}\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right) \\ &= V^2 - 2gy, && \text{per (2).} \end{aligned}$$

Per acquistare questa velocità cadendo dalla quiete, l'elemento deve cadere, Art. 76, per un'altezza $\frac{v^2}{2g}$, o $\frac{V^2}{2g} - y$, cioè per la distanza dalla direttrice.

102. *Trovare il tempo della corsa secondo un piano orizzontale.*

Si ponga $y = 0$ nell'equazione (3). I valori corrispondenti di x sono 0 e $\frac{2V^2}{g}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$. Ma la velocità orizzontale è $V\cos\alpha$.

Quindi il tempo della corsa è $\frac{2V \operatorname{sen} \alpha}{g}$; e, tutte le altre circostanze eguali, varia come il seno dell'*elevazione* (inclinazione all'orizzonte) della linea di proiezione.

103. *Trovare il tempo della corsa secondo un piano inclinato che passa pel punto di proiezione.*

La sua intersezione col piano di proiezione faccia un angolo β con l'orizzonte; è evidente che dobbiamo solamente eliminare y tra (3) ed $y = x \tan \beta$.

Questo dà per l'ascissa del punto dove il proiettile incontra il piano,

$$x_1 = \frac{2V^2}{g} (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \tan \beta \cos^2 \alpha)$$

$$= \frac{2V^2 \cos \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta)}{g \cos \beta}.$$

Quindi il tempo della corsa

$$= \frac{x_1}{V \cos \alpha} = \frac{2V}{g} \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)}{\cos \beta}.$$

104. *Trovare la direzione della proiezione che dà la massima ampiezza del tiro su di un dato piano.*

L'ampiezza sul piano orizzontale è $\frac{V^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha$. Per un dato valore di V questa sarà massima quando

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{o} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Quella sul piano inclinato è $\frac{x_1}{\cos \beta}$, o

$$\frac{2V^2}{g \cos^2 \beta} \cos \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta).$$

Affinchè questa sia un massimo per un dato valore di V dobbiamo eguagliare a zero il suo coefficiente differenziale rispetto ad α, il che dà l'equazione

$$\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta) = 0,$$

o

$$\cos (2\alpha - \beta) = 0;$$

quindi

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right).$$

Quindi la direzione della proiezione richiesta per la massima ampiezza del tiro fa con la verticale un angolo

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

cioè, essa biseca l'angolo tra la verticale ed il piano sul quale l'ampiezza è misurata.

105. *Trovare l'elevazione necessaria al passaggio dell'elemento per un punto dato.*

Si supponga il punto nell'asse delle x alla distanza a dall'origine. Allora dobbiamo avere

$$\frac{V^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha = a.$$

Sia α' il più piccolo angolo positivo il di cui seno è $\frac{ga}{V^2}$.

I valori ammissibili di α sono $\frac{\alpha'}{2}$ e $\frac{\pi - \alpha'}{2}$; sicchè vediamo che vi sono due direzioni nelle quali un elemento può essere proiettato in modo da raggiungere il punto dato, e che queste sono egualmente inclinate alla direzione della proiezione $\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right)$ che dà la massima ampiezza del tiro.

Supponiamo che il punto dato sia nel piano che fa un angolo β con l'orizzonte. Allora se la sua ascissa è a, dobbiamo avere

$$\frac{2V^2}{g \cos \beta} \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = a.$$

Se α', α'' sono i due valori di α che soddisfano questa equazione, dobbiamo avere

$$\cos \alpha' \operatorname{sen}(\alpha' - \beta) = \cos \alpha'' \operatorname{sen}(\alpha'' - \beta);$$

e quindi

$$\alpha'' - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha'$$

o

$$\alpha'' - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \alpha'.$$

Quindi, come sopra, le due direzioni della proiezione, che fanno colpire all'elemento un punto in un dato piano condotto pel punto di proiezione, sono egualmente inclinate alla direzione della proiezione richiesta per la massima ampiezza del tiro secondo quel piano.

106. *Trovare l'inviluppo di tutte le traiettorie corrispondenti ai diversi valori di α.*

Differenziando l'equazione (3) rispetto ad α, abbiamo

$$\sec^2\alpha - \frac{gx}{V^2}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^3\alpha} = 0 ,$$

o

$$\tan\alpha = \frac{V^2}{gx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

L'eliminazione di α fra (3) e (4) ci dà per equazione dell'inviluppo richiesto

$$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V^2} ,$$

o

$$x^2 = -\frac{2V^2}{g}\left(y - \frac{V^2}{2g}\right).$$

Questa rappresenta una parabola di cui l'asse è verticale, il fuoco è il punto di proiezione, ed il vertice è nella direttrice comune delle traiettorie.

Si vedrà facilmente per le cose dette che vi sono due direzioni di proiezione, tali che l'elemento passi per un punto dato qualunque nell'interno di questa parabola, solamente una per un punto in essa; ed evidentemente non vi è alcuna possibilità che esso passi (con la data velocità V) per un punto fuori di questa parabola.

107. Con un metodo alquanto più semplice di considerare il problema avremmo potuto giungere ad alcune delle più ovvie proprietà della traiettoria, così.

Si prenda la direzione della proiezione come asse delle x, e la verticale in giù dal punto di proiezione come asse delle y. Per la seconda legge del moto possiamo considerare la velocità dovuta alla proiezione mantenersi costante ($= V$) parallelamente all' asse delle x, mentre abbiamo inoltre parallelamente all' asse delle y la porzione dovuta alla gravità investigata nell' Art. 76.

Quindi

$$\left.\begin{aligned} x &= Vt \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \text{ ad ogni tempo,}$$

e quindi

$$x^2 = \frac{2V^2}{g}y ,$$

l'equazione di una parabola riferita ad un diametro ed alla tan-

gente nel suo vertice. La distanza dell'origine dalla direttrice, essendo $\frac{1}{4}$ del coefficiente di y, è $\frac{V^2}{2g}$, e la velocità dovuta ad una caduta per quello spazio è come sopra

$$\sqrt{\left(2g \cdot \frac{V^2}{2g}\right)} = V.$$

108. Quando, invece di supporre la gravità costante, e di agire in linee parallele, facciamo la supposizione più accurata che essa tenda al centro della Terra, e varii inversamente come il quadrato della distanza da quel punto, il Capitolo V. ci mostra che in generale la traiettoria di un proiettile è un'*Ellisse*, di cui uno dei fuochi è al centro della Terra, e la lunghezza del suo asse maggiore dipende solamente dalla *velocità* di proiezione. Le proposizioni seguenti (tra molte altre analoghe a quelle date precedentemente) si possono allora enunciare.

1. Il luogo del secondo fuoco delle traiettorie di tutt'i proiettili lanciati da un dato punto, con una data velocità, in un piano verticale, è un circolo.

2. La direzione della proiezione, per la massima ampiezza del tiro in una data linea, che passa pel punto di proiezione, biseca l'angolo tra la verticale e la linea.

3. Ogni altro punto sulla linea, che può essere colpito, lo può essere con *due* traiettorie diverse, e le direzioni della proiezione per queste sono egualmente inclinate alla direzione che dà la massima ampiezza.

4. Se il proiettile incontra la linea ad angoli retti, il punto che esso colpisce è il vertice dell'altra traiettoria che può passare per esso.

5. L'inviluppo di tutte le traiettorie possibili in un piano verticale, è un'ellisse, di cui uno dei fuochi è il centro della terra, e l'altro il punto di proiezione.

109. *Quando un elemento si muove soggetto all' azione di due centri di forza di cui la legge è la distanza diretta e le intensità assolute sono le stesse, ma una attrattiva e l'altra ripulsiva, il suo movimento sarà lo stesso come quello di un proiettile nel vuoto.*

Infatti la forza totale sull'elemento risoluta perpendicolarmente alla linea che congiunge i centri è evidentemente zero, e quella parallela a questa linea è eguale a quella che sarebbe esercitata da ciascuno dei centri sopra un elemento situato nel-

l'altro; e tende sempre nella direzione parallela a quella dal centro ripulsivo all'attrattivo. Essa corrisponde perciò esattamente alla forza di gravità, entro moderate elevazioni al di sopra della superficie terrestre.

110. Ancora se un elemento si muove sopra un piano inclinato all'orizzonte sotto un angolo θ, la forza totale su di esso è, per l'Art. 78, $g \operatorname{sen} \theta$ parallela alla linea di massimo pendìo sul piano, e quindi la traiettoria sarà ancora una parabola, le di cui dimensioni dipenderanno da θ.

Es. *Un elemento è proiettato da un dato punto con una data velocità, e si muove su di un piano inclinato; trovare il luogo delle direttrici delle sue traiettorie per differenti inclinazioni del piano.*

Si vedrà facilmente che quando un elemento si muove su di un piano inclinato, la velocità in ogni punto è eguale a quella che si acquisterebbe cadendo dalla direttrice; cioè (Art. 79) eguale alla velocità dovuta alla caduta da un piano orizzontale condotto per la direttrice. Ora la velocità è data costante, quindi il luogo delle direttrici è un piano orizzontale.

111. *Un elemento si muove assoggettato all'azione di una forza sempre perpendicolare ad un piano dato, la sua grandezza essendo una funzione della distanza dell'elemento dal piano: determinare il movimento.*

È evidente che il movimento sarà confinato interamente nel piano condotto per la direzione della proiezione perpendicolarmente al piano attraente. Prendiamo il piano del movimento per quello delle xy, l'asse delle x essendo nel piano attraente. Sia $\varphi'(D)$ l'accelerazione alla distanza D, in cui φ' è la funzione derivata di φ. Allora le equazioni del moto sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi'(y).$$

Si supponga l'elemento proiettato da un punto (a,b), in una direzione che fa un angolo α con l'asse delle x, e con una velocità V.

Moltiplicando per $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, ed integrando abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \text{cost.} = V^2\cos^2\alpha, \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= C - 2\varphi(y) = V^2\operatorname{sen}^2\alpha + 2\varphi(b) - 2\varphi(y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (1).$$

Quindi $$v^2 = V^2 + 2\{\varphi(b) - \varphi(y)\},$$
e dipende perciò solamente dalla distanza dal piano attraente, un caso particolare della conservazione dell'energia.

Per trovare l'equazione differenziale della traiettoria, abbiamo

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{[V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2\{\varphi(b) - \varphi(y)\}]}}{V \cos \alpha},$$

un'equazione integrabile solamente per forme particolari della funzione φ. Un caso interessante è quello in cui l'attrazione del piano è inversamente come il cubo della distanza,

o $$\varphi'(y) = \frac{\mu}{y^3}, \quad \text{e quindi} \quad \varphi(y) = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{y^2}.$$

L'equazione differenziale diviene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\left\{\left(V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\mu}{b^2}\right) + \frac{\mu}{y^2}\right\}}}{V \cos \alpha},$$

Vi sono tre casi secondo che la quantità

$$V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\mu}{b^2}$$

è positiva, zero o negativa.

1. Sia essa positiva ed $= \frac{\mu}{a_1^2}$,

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\mu}}{Va_1 \cos \alpha} \sqrt{(a_1^2 + y^2)};$$

onde $$\sqrt{(a_1^2 + y^2)} = \frac{\sqrt{\mu}}{Va_1 \cos \alpha}(x + C),$$

equazione di un'iperbole il di cui asse *trasverso* è l'asse delle x.

2. Sia $$V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\mu}{b^2} = 0.$$

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\mu}}{V \cos \alpha},$$

ed $$y^2 = \frac{2\sqrt{\mu}}{V \cos \alpha}(x + C),$$

equazione di una parabola il di cui asse è l'asse delle x.

3. Sia $V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\mu}{b^2}$ negativa, ed $= -\frac{\mu}{a_1^2}$,

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\mu}}{Va_1 \cos\alpha}\sqrt{(a_1^2 - y^2)},$$

o

$$-\sqrt{(a_1^2 - y^2)} = \frac{\sqrt{\mu}}{Va_1 \cos\alpha}(x + C),$$

equazione di un'ellisse di cui l'asse delle x è un asse.

Avremmo potuto ottenere i risultati precedenti integrando separatamente le due equazioni del movimento, e poi eliminando t tra esse.

Se la forza è ripulsiva, in vece di attrattiva, è facile vedere, con una leggiera modificazione del procedimento precedente, che vi è solamente un caso, e che la curva descritta è un'iperbole il di cui asse *coniugato* giace nell'intersezione del piano di proiezione e del piano attraente.

Da questo vediamo che le sezioni coniche sono le sole curve che possono essere descritte da un elemento libero che si muove in un piano assoggettato ad una forza nella direzione, ed inversamente come il cubo, della distanza perpendicolare da una data linea in quel piano.

È facile investigare l'inversa di ciascuna delle proposizioni precedenti; così, prendendo la prima, il nostro problema diviene

112. *Trovare la legge della forza perpendicolare ad un asse affinchè un elemento libero possa descrivere una sezione conica.*

Si prenda l'asse per quello delle x, ed il vertice per origine, allora l'equazione

$$y^2 = 2mx + nx^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

rappresenterà, prendendo convenientemente m ed n, una parabola, un'iperbole riferita al suo asse trasverso, o un'ellisse riferita ad uno degli assi.

Essendo la forza perpendicolare all'asse, abbiamo

$$\frac{dx}{dt} = c.$$

Quindi

$$y\frac{dy}{dt} = mc + nxc\,;$$

ed

$$y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = nc^2.$$

Da queste
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{y}\left\{nc^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{y}\left\{nc^2-\frac{(m+nx)^2}{y^2}c^2\right\}$$
$$=\frac{c^2}{y^3}(ny^2-m^2-2mnx-n^2x^2)$$
$$=-\frac{c^2m^2}{y^3}\text{ per l'equazione (1).}$$

Pel secondo caso, quello di un'iperbole riferita al suo asse coniugato preso per asse delle x, l'equazione è
$$y^2=p^2x^2+q^2.$$

Quindi
$$y\frac{dy}{dt}=p^2x\frac{dx}{dt}$$
$$=p^2cx,$$

dalla quale abbiamo immediatamente
$$y\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=p^2c^2.$$

Cioè,
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{y}\left\{p^2c^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{p^2c^2}{y}\left(1-\frac{p^2x^2}{y^2}\right)$$
$$=\frac{p^2q^2c^2}{y^3}.$$

113. *Trovare la forza che deve agire perpendicolarmente ad un piano, in termini della distanza da quel piano, affinchè si possa descrivere una data traiettoria.*

Si prendano gli assi come sopra; allora, Y essendo la forza cercata (una funzione della sola y), abbiamo
$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \text{ o }\ \frac{dx}{dt}=\text{cost.}=a,\ \text{supponiamo};$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=Y\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Sia $y = f(x)$ l'equazione della curva data, allora

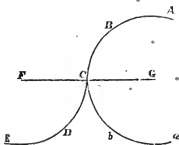
$$\frac{dy}{dt} = af'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 f''(x),$$

o per (1),

$$Y = a^2 f''(x)$$
$$= a^2 f'' \{ f^{-1}(y) \},$$

per l'equazione della curva. Quindi, siccome f è una data funzione, la legge della forza richiesta è trovata.

114. È necessario di osservare che, nel caso dell'Art. 110, quando l'elemento attualmente giunge all'asse, esso non continuerà a descrivere la porzione della stessa curva che giace dall'altra parte dell'asse, poichè ciò porterebbe un cambiamento nel segno della costante velocità orizzontale. Infatti, è evidente che in tali casi l'elemento avendo descritto ABC, invece di continuare il corso Cba descriverà attualmente CDE simile ed eguale a Cba, ma rivolto nella direzione opposta. Ed una simile osservazione si applica al problema generale nell'Art. 113.

115. È utile notare che i casi di questa specie si riducono immediatamente ad investigazioni simili a quelle dell'ultimo Capitolo, considerando, separatamente, le equazioni del moto parallelo e perpendicolare al piano attraente.

Ogni volta, quindi, che possiamo determinare completamente il moto di un elemento verso un centro di forza, in una linea retta, possiamo ancora risolvere completamente il problema del moto di un elemento lanciato comunque, ed attratto da un piano indefinito; la legge della forza in termini della distanza essendo la stessa nei due casi.

116. *Generalmente, quando un elemento è lanciato comunque ed assoggettato solamente all'azione di una forza la di cui direzione è perpendicolare ad un dato piano, e di cui la grandezza dipende solamente dalla distanza dal piano; la velocità paral-*

lela a quel piano è costante; e, nel passare da un punto qualunque ad un altro, il quadrato dell'intera velocità è alterato per una quantità che dipende solamente dalle distanze di quei due punti dal piano dato.

Si prenda l'asse delle y perpendicolare al piano dato, e l'asse delle x in esso, in modo che la direzione della proiezione stia in xy. Questo sarà evidentemente il piano del moto; e le equazioni sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

Quindi
$$\frac{dx}{dt} = c ,$$

e
$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V^2 + 2\int_{y_1}^{y} Y\,dy$$
$$= V^2 + \varphi(y, y_1) ,$$

V essendo la velocità di proiezione; ed y_1 la coordinata del punto di proiezione; ciò dimostra la proposizione.

Questo è, evidentemente, un semplice caso particolare del principio generale della Conservazione dell'Energia (Art. 72).

ESEMPII.

1. Il tempo per descrivere una porzione qualunque PQ della traiettoria parabolica di un elemento sollecitato dalla gravità, è proporzionale alla differenza delle tangenti degli angoli che le tangenti in P e Q fanno con l'orizzonte.

2. Le mire di un'arma da fuoco sono dirette in modo che la palla possa colpire un dato oggetto; mostrare che quando le mire sono dirette ad ogni altro oggetto nella stessa linea verticale, la palla lo colpirà ancora.

3. Mostrare che il tempo impiegato da un proiettile per descrivere un arco della sua traiettoria staccata da una corda focale è eguale al tempo della caduta verticale dalla quiete per uno spazio eguale alla corda.

4. Se una bomba scoppia, tutt'i fragmenti ricevendo velocità eguali dall'esplosione; mostrare che il luogo dei fuochi delle traiettorie dei fragmenti è una sfera, dei vertici uno sferoide schiacciato, e degli elementi stessi ad un tempo qualunque una sfera.

5. Due corpi, lanciati dallo stesso punto A, in direzioni che fanno gli angoli α, α' con la verticale, passano pel punto B nel piano orizzontale condotto per A; dimostrare che se t, t' sono i tempi della corsa da A a B,

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{sen}(\alpha + \alpha')} = \frac{t'^2 - t^2}{t'^2 + t^2}.$$

6. Con quale velocità deve essere tirato un proiettile sotto un'elevazione di 30^0, in modo da colpire un oggetto alla distanza di 2500 metri sopra una salita di 1 per 40?

7. ABC è un triangolo rettangolo in un piano verticale con la sua ipotenusa AB orizzontale; un elemento proiettato da A passa per C e cade in B; dimostrare che la tangente dell'angolo di proiezione $= 2 \operatorname{cosec} 2A$, e che il lato retto della traiettoria descritta è eguale all'altezza del triangolo.

8. Se un corpo è proiettato sotto un angolo α all'orizzonte con la velocità dovuta alla gravità in un secondo, la sua direzione è inclinata sotto un angolo $\frac{\alpha}{2}$ all'orizzonte al tempo $\tan\frac{\alpha}{2}$, e sotto un angolo $\frac{\pi - \alpha}{2}$ al tempo $\cot\frac{\alpha}{2}$.

9. Un piano AB inclinato sotto un angolo α all'orizzonte, conduce su di un piano orizzontale BC; un elemento è proiettato con una velocità V dal punto A, attraversa il piano AB, e cade sul piano orizzontale BC; se i tempi del movimento da A a B e da B a C sono eguali, mostrare che

$$AB = \frac{2V^2}{g} \frac{\operatorname{sen}\alpha(1 + \operatorname{sen}^2\alpha)}{(1 + 2\operatorname{sen}^2\alpha)^2}.$$

10. Tre elementi sono lanciati simultaneamente dallo stesso punto, e colpiscono simultaneamente il piano orizzontale condotto pel punto; dimostrare che, se le ampiezze dei loro tiri sono in progressione geometrica, i lati retti delle loro traiettorie saranno anche in progressione geometrica.

11. Se u e v sono le velocità nelle estremità di una corda focale della traiettoria di un proietto, V_x la velocità orizzontale, mostrare che

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{V_x^2}.$$

12. Da un punto in un piano inclinato sono lanciati due corpi

con la stessa velocità nello stesso piano verticale in direzioni ad angoli retti tra loro; la differenza delle ampiezze dei loro tiri è costante.

13. Una palla è lanciata in un piano verticale che passa pel sole, in una direzione inclinata sotto un angolo θ all'orizzonte, e si osserva che scorrono t secondi dall'istante in cui la palla è nella linea che congiunge il punto di proiezione col sole sino a che essa giunge di nuovo al suolo, e che T secondi è il tempo totale della corsa: mostrare che

$$t \tan\theta = T \tan\alpha\,,$$

in cui α è l'altezza del sole.

14. Trovare un'espressione per la velocità dell'ombra sul suolo in 13; e mostrare che la sua massima distanza dal punto di proiezione è $\frac{V^2 \operatorname{sen}^2(\theta-\alpha)}{g \operatorname{sen} 2\alpha}$, e che essa arriverà a questa posizione dopo un tempo $\frac{V \operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{g \cos\alpha}$, V essendo la velocità di proiezione. Dimostrare ancora che l'ombra si muove con una accelerazione uniforme $g \cot\alpha$.

15. Un elemento è proiettato dalla cima di una torre con la velocità che si acquisterebbe cadendo verticalmente per n volte l'altezza della torre, trovare l'ampiezza del tiro sul piano orizzontale condotto pel piede della torre, e mostrare che essa sarà un massimo quando l'angolo di proiezione è

$$\frac{1}{2}\sec^{-1}(1+2n).$$

16. Due piani inclinati di eguale altezza h, ed inclinati sotto lo stesso angolo α all'orizzonte, sono situati dorso a dorso sopra un piano orizzontale. Una palla è lanciata dal piede di un piano lungo la sua superficie ed in una direzione che fa un angolo β con la sua linea d'intersezione col piano orizzontale. Dopo di esser passata sullo spigolo alla sommità essa cade al piede dell'altro piano; mostrare che la velocità di proiezione è

$$\frac{1}{2}\sqrt{gh}\operatorname{cosec}\beta\ \sqrt{8+\operatorname{cosec}^2\alpha}.$$

17. Due corpi A, B sollecitati dalla gravità sono proiettati da due punti dati nella stessa linea verticale con la stessa velocità ed in direzioni parallele; mostrare che se A è più alto di B, le

coppie di tangenti tirate alla traiettoria di B da punti qualunque della traiettoria di A intercetteranno archi descritti da B in tempi eguali.

18. Se v, v', v'', sono le velocità in tre punti P, Q, R della traiettoria di un proiettile in cui le inclinazioni all'orizzonte sono $\alpha, \alpha-\beta, \alpha-2\beta$; e se t, t' sono i tempi per descrivere PQ, QR rispettivamente, mostrare che

$$v''t = vt', \text{ ed } \frac{1}{v}+\frac{1}{v''}=\frac{2\cdot\cos\beta}{v'}.$$

19. Se due elementi sono proiettati dallo stesso punto nello stesso istante nello stesso piano verticale, con velocità v e v_1 in direzioni che fanno gli angoli α ed α_1 con l'orizzonte; mostrare che l'intervallo tra i loro passaggi per l'altro punto che è comune alle loro traiettorie è

$$\frac{2}{g}\cdot\frac{vv_1 \operatorname{sen}(\alpha-\alpha_1)}{v_1\cos\alpha_1+v\cos\alpha}.$$

20. Se si tira una corda qualunque nella traiettoria di un proiettile le velocità dell'elemento alle sue estremità, risolute perpendicolarmente alla corda, sono eguali.

21. Degli elementi partendo dalla quiete nel punto più alto di un circolo verticale scendono per le corde, e possono poi muoversi liberamente; mostrare che il luogo dei fuochi delle loro traiettorie è un circolo di dimensioni metà, e che tutte le traiettorie bisecano il raggio verticale.

22. Se gli elementi scendono per le corde al punto più basso, e poi si muovono liberamente, il luogo dei fuochi è una cardioide.

23. Per quale corda dal vertice di un circolo verticale deve scendere un elemento per avere quando cade liberamente la massima ampiezza del tiro sopra un dato piano orizzontale?

24. Trovare il luogo dei fuochi di tutte le traiettorie che passano per due punti dati.

25. L'inviluppo di tutte le parabole che corrispondono ad una data velocità di proiezione è eguale alla traiettoria per la quale la direzione della proiezione è orizzontale.

26. Degli elementi scendono per i *diametri* di un circolo verticale; il luogo dei fuochi delle traiettorie susseguenti è il circolo.

27. Se due corpi sono lanciati dallo stesso punto, con eguali velocità, ed in tali direzioni che essi arrivino entrambi allo stesso

punto di un piano la di cui inclinazione all'orizzonte è β, e se t e t' sono i tempi della corsa, ed α è l'angolo di proiezione del primo,

$$t' = t \cdot \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}.$$

28. Se il fuoco della traiettoria del proiettile è tanto al di sotto del piano orizzontale condotto pel punto di proiezione, di quanto il vertice è al di sopra; mostrare che il doppio dell'angolo di proiezione

$$= \sec^{-1} 3.$$

29. Dai punti di un piano inclinato sono lanciati simultaneamente degli elementi in diverse direzioni; se i tempi della loro corsa sono gli stessi, mostrare che il loro luogo ad ogni istante è un piano parallelo al piano dato.

30. Un elemento è lanciato al di sopra di un triangolo da un estremo della base orizzontale, e, sfiorando il vertice, cade sull'altro estremo della base. Se α, β sono gli angoli alla base, θ l'angolo di proiezione,

$$\tan\theta = \tan\alpha + \tan\beta.$$

31. Per la massima ampiezza del tiro su di un piano inclinato condotto pel punto di proiezione, la direzione del moto nel lasciare il piano è ad angoli retti su quella nel raggiungere il piano.

32. Degli elementi sono lanciati dallo stesso punto in un piano verticale: 1°, con la stessa velocità verticale, 2° con la stessa velocità orizzontale; mostrare che in ciascun caso il luogo dei fuochi è una parabola il di cui fuoco è al punto di proiezione, e l'asse verticale, ma il di cui vertice è in su nel caso (1) ed in giù in (2).

33. Se α è l'angolo di proiezione, T il tempo che scorre prima che il proiettile colpisca il suolo, dimostrare che al tempo $\frac{T}{4\operatorname{sen}^2\alpha}$ l'angolo che la direzione del movimento fa con la direzione della proiezione è $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

34. Se un corpo descrive un arco di una cicloide sotto l'azione di una forza parallela alla base, mostrare che questa forza varia inversamente come $2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta$, θ essendo l'arco corrispondente del circolo generatore misurato dal vertice.

35. Se la forza perpendicolare ad un piano varia come la distanza, mostrare che le curve descritte hanno equazioni della forma

$$y = Aa^x + Ba^{-x}, \qquad \text{o} \qquad y = A\cos(mx + B)$$

secondo che la forza è ripulsiva o attrattiva.

Trovare le circostanze della proiezione nei due casi affinchè le curve siano la catenaria, e la compagna della cicloide, rispettivamente.

36. Degli elementi sono proiettati nello stesso piano e dallo stesso punto, in modo tale che le parabole descritte siano eguali; dimostrare che il luogo dei vertici di queste parabole sarà una parabola.

37. Trovare la direzione della proiezione, con una data velocità, da un punto dato, affinchè un piano dato, che non passa pel punto, sia raggiunto nel minimo tempo possibile.

38. Mostrare che la minima inclinazione all'orizzonte con la quale un elemento può essere proiettato in modo da colpire ad angoli retti un piano qualunque condotto pel punto di proiezione è $\cos^{-1}\frac{1}{3}$.

Se la direzione della proiezione è inclinata sotto un angolo θ al piano, e se la proiezione sul piano di questa direzione è inclinata sotto un angolo φ alla linea di massimo pendio, mostrare che l'ampiezza del tiro sul piano è

$$\frac{2V^2}{g}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\alpha}\left(\cos^2\theta\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\theta\,\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\,\operatorname{sen}2\alpha\cos\varphi\right),$$

in cui α è l'inclinazione del piano all'orizzonte.

39. Un'ellisse è descritta col suo asse maggiore orizzontale e doppio del suo asse minore. Dai punti nella metà inferiore di questa ellisse degli elementi si proiettano orizzontalmente con le velocità che si acquisterebbero cadendo dall'asse maggiore; dimostrare che l'inviluppo di tutte le traiettorie paraboliche descritte è una parabola il di cui fuoco è il centro dell'ellisse, e la direttrice è la tangente al punto più alto nel circolo ausiliario.

40. Degli elementi scendono per i raggi vettori della curva di cui l'equazione è $r=f(\theta)$, il piano della curva essendo verticale e θ essendo misurato da una linea orizzontale, dimostrare che il

luogo dei fuochi delle loro future traiettorie è la curva

$$r = \cos\frac{\theta}{2} f\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

41. Per un punto si tira un piano inclinato, e da quel punto si proietta un elemento con una data velocità in modo che la sua direzione del movimento quando esso incontra il piano di nuovo lo taglia ad angoli retti; mostrare che il luogo del punto d'incontro per differenti posizioni del piano inclinato è un'ellisse.

42. La forza di attrazione tra due elementi è $\frac{\mu m^2}{r^3}$ in cui m è la massa di ciascun elemento, ed r la distanza tra loro, ed essi sono proiettati con eguali velocità dalla stessa parte della linea (c) che li congiunge in direzioni non parallele ma egualmente inclinate a quella linea; dimostrare che la traiettoria di ciascuno sarà un'ellisse, una parabola, o un'iperbole secondo che la componente iniziale di ciascuna velocità nella direzione della linea (c) è minore, eguale, o maggiore di $\frac{\sqrt{2\mu m}}{c^2}$.

43. Un elemento perfettamente elastico è proiettato nell'interno di un prisma fisso cavo, che sta in piedi sopra un dato piano orizzontale. Dimostrare che l'intera lunghezza della traiettoria, che esso descrive prima di arrivare al piano, è indipendente dalla forma del prisma.

44. Un elemento perfettamente elastico è proiettato in modo da colpire nell'interno una superficie di rotazione di cui l'asse è verticale e dato di posizione. Mostrare che i vertici di tutte le orbite paraboliche descritte dopo i successivi rimbalzi giacciono sopra una superficie che è indipendente dalla superficie di rotazione.

45. Se α è l'angolo di elevazione richiesto affinchè una palla di moschetto abbia una certa ampiezza di tiro sopra un piano orizzontale, θ l'elevazione addizionale richiesta sopra un piano inclinato all'orizzonte sotto un angolo β,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}(2\alpha + \beta)}.$$

46. Un elemento pesante è proiettato da un punto dato con una data velocità u in modo che l'ampiezza del tiro sopra un dato piano inclinato sia la massima possibile; dimostrare che, se v è la velocità finale, e si abbassa la perpendicolare sul piano

dato dal punto d'intersezione delle direzioni iniziale e finale del movimento, la lunghezza della perpendicolare è $\frac{ur}{2g}$.

47. Un arco cicloidale è situato col suo asse verticale ed il vertice in su, ed un elemento pesante è proiettato in modo, che dopo di essersi mosso in contatto con l'arco per una distanza finita, descriva liberamente una parabola; dimostrare che il fuoco della parabola giace sopra una cicloide di dimensioni metà avente la stessa base.

CAPITOLO V.

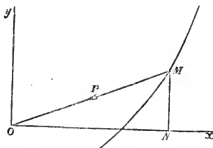
Forze centrali.

117. In questa parte del soggetto consideriamo il moto di un elemento assoggettato ad una forza di cui la direzione passa sempre per un punto fisso, e l'intensità è una funzione della distanza da quel punto. Il punto fisso si chiama il *Centro di Forza*, e la forza si dice essere attrattiva o ripulsiva secondo che essa è diretta al o dal centro. La prima, siccome comprende le più importanti applicazioni del soggetto, la prenderemo come caso di paragone; ma si vedrà che un semplice cambiamento di segno adatterà le nostre formole generali alla seconda. Se il centro di forza è esso stesso in movimento, i metodi degli Art. 26, 31, ci abiliteranno facilmente a trattarlo come fisso; ma in questo caso l'accelerazione relativa non è in generale diretta al centro, sicchè il problema non appartiene più strettamente come si dice alle *Forze Centrali*. Esso sarà considerato più tardi. Se il centro si muove uniformemente in una linea retta, i risultati di questo capitolo sono applicabili immediatamente al moto relativo.

118. *Un elemento è lanciato in un piano, ed è sollecitato da una forza* P *diretta al punto fisso* O *in quel piano; determinare il moto.*

L'intero moto avrà luogo evidentemente nel piano, non essendovi alcuna forza per allontanare l'elemento da esso. Si prendano per assi delle coordinate Ox, Oy, due linee rette qualunque tirate per O ad angoli retti tra loro. Sia M la posizione dell'ele-

mento al tempo t, si tiri MN perpendicolare ad Ox, e si congiun-

ga MO. Sia $ON=x$, $NM=y$, $OM=r$, e l'angolo $NOM=\theta$. Allora, essendo $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}$, le componenti di P, parallele agli assi e nelle direzioni negative, sono $P\frac{x}{r}$, $P\frac{y}{r}$. Ma per la seconda legge del moto possiamo considerare le accelerazioni nelle direzioni delle x e delle y separatamente, ed abbiamo perciò

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -P\frac{x}{r} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -P\frac{y}{r} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A).$$

In queste, siccome P è una funzione di r, e quindi di x ed y, i secondi membri conterranno generalmente tutte e due queste variabili, e le equazioni si debbono trattare come equazioni differenziali simultanee. I loro integrali daranno $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ in termini di t; da ciò si conoscerà la posizione e la velocità dell'elemento ad ogni istante, ed il problema sarà completamente risoluto. In un caso, però, cioè quando P è proporzionale ad r, la prima equazione conterrà x e t, e la seconda y e t, solamente, e ciascuna equazione si può integrare da sè. Siccome questo è l'esempio più semplice di questa classe, e di grande importanza nelle sue applicazioni, specialmente all'Acustica e all'Ottica Fisica, incominceremo dal considerare questo caso.

119. *Un elemento si muove intorno ad un centro di forza, la forza variando direttamente come la distanza: determinare il movimento.*

Sia μ l'accelerazione all'unità di distanza, comunemente chiamata la forza assoluta del centro, allora $P=\mu r$, e le equazioni (A) diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mu x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mu y \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B),$$

gl'integrali delle quali, si vegga l'Art. 77, sono

$$x = A\cos\{\sqrt{\mu}t + B\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$y = A'\cos\{\sqrt{\mu}t + B'\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

A, B, A', B' essendo le costanti introdotte nell'integrazione, da

determinarsi con le circostanze iniziali del movimento. Si consideri l'elemento proiettato da un punto sull'asse delle x, alla distanza a dal centro, con la velocità V, ed in una direzione che fa un angolo α con Ox. Quando $t = 0$, abbiamo $x = a$, $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = V\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = V\operatorname{sen}\alpha$. Quindi,

$$a = A\cos B\,,$$
$$0 = A'\cos B',$$
$$V\cos\alpha = -A\sqrt{\mu}\operatorname{sen} B\,,$$
$$V\operatorname{sen}\alpha = -A'\sqrt{\mu}\operatorname{sen} B'.$$

Sviluppando i coseni in (1) e (2), e sostituendo queste espressioni per le costanti, otteniamo

$$x = \frac{V\cos\alpha}{\sqrt{\mu}}\operatorname{sen}\sqrt{\mu}t + a\cos\sqrt{\mu}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$y = \frac{V\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{\mu}}\operatorname{sen}\sqrt{\mu}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

che contengono la completa soluzione del problema. Eliminando t, abbiamo

$$(x\operatorname{sen}\alpha - y\cos\alpha)^2 + \frac{\mu a^2}{V^2}y^2 = a^2\operatorname{sen}^2\alpha,$$

equazione della traiettoria dell'elemento; la quale è perciò un'ellisse che ha per centro O. Le equazioni (3) e (4) danno valori periodici per x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, tali che tutte le circostanze del movimento saranno le stesse al tempo $t + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ come al tempo t. Il periodo della rivoluzione è quindi $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$: risultato molto rimarchevole, essendo indipendente dalle dimensioni dell'ellisse, e dipende solo dall'intensità della forza.

Prendendo μ negativa nelle equazioni (B), possiamo applicarle al caso di una forza ripulsiva che varia come la distanza da O. Nell'integrazione per questa supposizione i seni e coseni saranno rimpiazzati da esponenziali, e la curva descritta sarà un'iperbole col centro in O; ma il movimento non sarà di rivoluzione, poichè l'elemento rimarrà sempre necessariamente sullo stesso ramo dell'iperbole.

120. Ritornando alle equazioni (A), in tutt'i casi, eccetto quello che abbiamo ora considerato, sarà più conveniente di tra-

sformarle in coordinate polari, specialmente poichè l'equazione differenziale polare dell'orbita descritta da un elemento sotto l'azione di una forza centrale si può formare facilmente, come segue.

121. *Un elemento essendo sollecitato da una forza centrale; si cerca di determinare l'equazione polare della traiettoria.*

Moltiplicando la seconda delle equazioni (A), Art. 119, per x, e la prima per y, e sottraendo, abbiamo

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Integrando,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \text{costante} = h \text{ supponiamo.}$$

Cambiando le variabili da x, y, ad r, θ, dove $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, abbiamo come nell'Art. 24,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \text{ .... } (1),$$

o, sostituendo $\frac{1}{u}$ per r,

$$\frac{d\theta}{dt} = hu^2 \text{ .... } (2).$$

Inoltre $$x = r\cos\theta = \frac{\cos\theta}{u};$$

che dà $$\frac{dx}{dt} = -\frac{u\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta\frac{du}{d\theta}}{u^2}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h\left(u\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta\frac{du}{d\theta}\right), \text{ per } (2);$$

e quindi $$\frac{d^2x}{dt^2} = -h\left(u\cos\theta + \cos\theta\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h^2u^2\left(u\cos\theta + \cos\theta\frac{d^2u}{d\theta^2}\right), \text{ per } (2).$$

Ma, dalla prima delle equazioni (A),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -P\cos\theta.$$

Eguagliando questi valori di $\frac{d^2x}{dt^2}$, e dividendo per $\cos\theta$, abbiamo

$$P = h^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

o

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{P}{h^2u^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Questa è l'equazione differenziale dell'orbita descritta; e siccome, in ogni esempio particolare, P sarà data in termini di r, e quindi in termini di u, il suo integrale sarà l'equazione polare della traiettoria richiesta.

122. Essa può ottenersi facilmente con le formole dell'Art. 16, e siccome questo metodo è utile ed instruttivo, lo diamo in aggiunta.

Invece delle equazioni (A) possiamo scrivere evidentemente (per gli Art. 16, 63)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -P,$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0\,,$$

le quali esprimono semplicemente che non vi è alcuna forza perpendicolare ad r, e che la forza secondo r è $-P$ sull'unità di massa.

Integrando la seconda equazione una volta, abbiamo, come prima,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Si ponga $\frac{1}{u}$ per r, come nell'ultimo articolo, ed abbiamo

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -h\frac{du}{d\theta},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Sostituendo questi valori nella prima equazione qui sopra, abbiamo

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = -P,$$

o

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{P}{h^2u^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

123. Gl'integrali generali di (A), che sono equazioni differenziali di secondo ordine, debbono contenere quattro costanti. Una di queste è stata già introdotta in (1), e due altre saranno introdotte dall'integrazione di (4). Se il valore di r in termini di θ dedotto dall'integrale di (4) si sostituisce in (1), e poi s'integra quell'equazione, s'introdurrà la rimanente costante, e si otterrà la traiettoria dell'elemento e la sua posizione ad ogni tempo. Le quattro costanti contenute nelle equazioni risultanti debbono essere determinate con le circostanze iniziali del movimento; cioè, la posizione iniziale dell'elemento (dipendente da *due* coordinate indipendenti), la sua velocità iniziale, e la sua direzione di proiezione.

124. L'equazione (3) si può usare per conoscere la legge della forza centrale che deve agire su di un elemento per fargli descrivere una curva data. Per effettuare ciò dobbiamo determinare la relazione tra u e θ dall'equazione polare dell'orbita proposta riferita al centro richiesto di forza come polo: dobbiamo quindi differenziare due volte u rispetto a θ, e sostituire il risultato nell'espressione di P; eliminando θ, se vi è contenuto, per mezzo della relazione tra u e θ. In questo modo otterremo P in termini della sola u, e quindi della sola r.

Quando conosciamo la relazione tra r e θ da (4), facciamo uso dell'equazione (1) per determinare il tempo per descrivere una data porzione dell'orbita; o, viceversa, per trovare la posizione dell'elemento nella sua orbita ad ogni tempo.

125. L'equazione dell'orbita tra r e p, il raggio vettore e la perpendicolare sulla tangente in ogni punto, si può ottenere facilmente da (4). Infatti pel *Calc. Dif.* abbiamo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p^3u^2}\frac{dp}{dr};$$

e quindi

$$P = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}.$$

126. *Il settore dell'area descritta dal raggio vettore dell'elemento in ogni tempo è proporzionale al tempo.* (Art. 24).

Se A dinota quest'area abbiamo, pel *Calc. Dif.*

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt};$$

e quindi, per l'equazione (1) dell'Art. 121,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2},$$

onde $$A = \frac{1}{2}ht + C = \frac{1}{2}ht,$$

C essendo zero se A e t si suppone che svaniscano insieme. Sia A' l'area descritta in un altro intervallo t', allora

$$A' = \frac{1}{2}ht';$$

e quindi $$A : A' :: t : t';$$

o sia, le aree descritte in differenti intervalli sono proporzionali a questi intervalli. Vediamo ancora, prendendo $t=1$, che il valore di h è due volte l'area descritta in una unità di tempo.

127. *La velocità dell'elemento in ogni punto della sua traiettoria è inversamente proporzionale alla perpendicolare dal centro di forza sulla tangente in quel punto.* (Art. 23).

Infatti $$\text{Velocità} = v = \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{r^2}{p}\frac{d\theta}{dt}, \text{ pel } \textit{Calc. Dif.}$$

(p essendo la perpendicolare sulla tangente dal centro di forza)

$$= \frac{h}{p}, \text{ per l'equazione (1) dell'Art. 121.}$$

Quindi, come sopra, v come $\frac{1}{p}$.

128. Questa equazione ci abilita ad esprimere h in termini delle circostanze iniziali del movimento. Infatti, sia R la distanza del punto di proiezione dal centro, V la velocità, e β l'angolo che la direzione della proiezione fa con quella di R. Allora evidentemente la perpendicolare sulla tangente al punto di proiezione $= R \operatorname{sen}\beta$;

o $$V = \frac{h}{R \operatorname{sen}\beta},$$

quindi $$h = VR \operatorname{sen}\beta.$$

Inoltre, poichè pel *Calc. Dif.*

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2,$$

abbiamo

$$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = h^2 \left\{ u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \right\},$$

altra importante espressione per la velocità.

129. *La velocità in un punto qualunque di un'orbita centrale è indipendente dalla curva descritta, e dipende solamente dalla intensità e legge della forza, la distanza del punto dal centro, e la velocità e distanza di proiezione.*

Si moltiplichino le equazioni (A) Art. 118, per $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ rispettivamente, e si aggiungano, allora

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{P}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= -P\frac{dr}{dt}.$$

$\left(\text{Poichè } x^2 + y^2 = r^2, \text{ abbiamo } x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}\right).$

Ma $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$;

Quindi $$\frac{d(v^2)}{dt} = -2P\frac{dr}{dt}.$$

Ancora, essendo P una funzione di r, sia $P = \varphi'(r)$, allora

$$\frac{1}{2}v^2 = C - \int \varphi'(r)\,dr$$
$$= C - \varphi(r).$$

Nel punto di proiezione $v = V$, $r = R$; e quindi

$$\frac{1}{2}V^2 = C - \varphi(R);$$

onde $$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}V^2 = \varphi(R) - \varphi(r),$$

il che dimostra la proposizione. (Si confronti l'Art. 72).

130. *La velocità di un elemento in un punto qualunque di un' orbita centrale è la stessa di quella che si acquisterebbe da un elemento che si movesse liberamente dalla quiete lungo un quarto della corda di curvatura nel punto, condotta pel centro di forza, sotto l' azione di una forza costante, la di cui intensità è eguale a quella della forza centrale nel punto.*

Dall' Art. 129,

$$\frac{d(v^2)}{dt} = -2P\frac{dr}{dt};$$

o

$$v\frac{dv}{dr} = -P.$$

E per l' Art. 127,

$$v = \frac{h}{p}.$$

Differenziando il logaritmo di questa, otteniamo

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{p}\frac{dp}{dr},$$

e, dividendo la prima equazione per questa,

$$v^2 = Pp\frac{dr}{dp} = 2P\frac{p}{r}\frac{2r}{4}\frac{dr}{dp}$$

$$= 2P\frac{q}{4},$$

in cui q è la corda di curvatura condotta pel centro. Quindi la proposizione, Art. 76.

Segue da ciò che la velocità, V, di un elemento che si muove in un circolo di raggio R, sotto l' azione di una forza qualunque P al centro, è data dall' equazione

$$V^2 = PR,$$

espressione semplice, e molto utile.

I risultati degli ultimi articoli si possono ottenere nel modo seguente.

Dagli Art. 44 e 59

$\frac{d^2s}{dt^2}$ = Parte risoluta di P secondo la tang. dell'orbita $= -P\frac{dr}{ds}$..(1),

$\frac{v^2}{\rho}$ = Parte risoluta di P secondo la normale $= P\frac{p}{r}$ .... (2).

Si moltiplichi (1) per $\frac{ds}{dt}$ e s'integri, allora

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C - \int P dr.$$

Da (2) $$v^2 = 2P \times \frac{1}{4}\left(2\rho\frac{p}{r}\right)$$

$$= 2P \cdot \frac{q}{4}.$$

Inoltre se in (2) si pone $\frac{h}{p}$ per v, Art. 127, ed $r\frac{dr}{dp}$ per ρ, otteniamo

$$\frac{h^2}{p^2 r \frac{dr}{dp}} = P\frac{p}{r},$$

o $$P = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr},$$

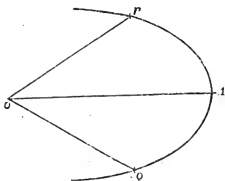
che è il risultato contenuto nell'Art. 125.

131. Def. Un *Apside* è un punto in un'orbita centrale nel quale il raggio vettore è un massimo o un minimo, ed il valore corrispondente del raggio vettore si chiama una *Distanza Apsidale*.

Le condizioni analitiche per un tal punto sono che $\frac{du}{d\theta}$ svanisca, e che il primo coefficiente differenziale seguente che non svanisce sia di ordine pari. Per la prima condizione la tangente in un apside è perpendicolare al raggio vettore.

Ogni linea apsidale divide l'orbita in due parti eguali e simili.

Infatti $\frac{du}{d\theta}$ cambia di segno nel passare per un apside, e quindi essendo $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$ una funzione di u, $f(u)$ supponiamo, se da una parte dell'apside $\frac{du}{d\theta}$ è rappresentata da $+\sqrt{f(u)}$, dall'altra parte sarà rappresentata da $-\sqrt{f(u)}$.

Quindi se A è un apside, O il centro di forza, ed OP, OQ due

linee qualunque in parti opposte di OA ed egualmente inclinate ad essa, abbiamo

$$\text{ang. } QOA = \int_{\frac{1}{OQ}}^{\frac{1}{OA}} \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

$$\text{ang. } AOP = \int_{\frac{1}{OA}}^{\frac{1}{OP}} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

(*Nota*. Questi integrali non hanno significato se vi è un apside in AP o in AQ, poichè allora essi contengono un elemento infinito).

Quindi
$$\int_{\frac{1}{OQ}}^{\frac{1}{OA}} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} + \int_{\frac{1}{OA}}^{\frac{1}{OP}} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = 0,$$

o
$$\int_{\frac{1}{OQ}}^{\frac{1}{OP}} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = 0 \text{ identicamente.}$$

Quindi, se P e Q si prendono così vicini ad A, che nessun apside oltre di A sia compreso tra essi, il che evidentemente è sempre possibile, a meno che l'orbita non sia un circolo col centro in O, abbiamo

$$OP = OQ,$$

ciò mostra che due raggi vettori qualunque in parti opposte di OA, ed egualmente inclinati ad essa, sono eguali. Quindi le parti AP, AQ, in cui OA divide l'orbita, sono eguali e simili, finchè nessuna di esse contenga un apside. Ma se P è un apside, è evidente che Q ne sarà un altro, e quindi, la porzione dell'orbita tra P e l'apside seguente essendo simile ed eguale a PA, e lo stesso essendo vero per Q, queste nuove porzioni sono simmetriche rispetto ad OA, e così di seguito: e la proposizione è completamente dimostrata.

132. *In un'orbita centrale non vi possono essere più di due distanze apsidali.*

Infatti, poichè le porzioni dell'orbita in parti opposte di un apside sono simili, l'elemento dopo di aver passato due apsidi deve pervenire ad uno ad una distanza eguale con quella del primo, indi ad uno ad una distanza eguale con quella del secondo, e così di seguito. Quindi non vi possono essere che due distanze apsidali.

133. Quando la forza centrale varia come una potenza della distanza, possiamo ottenere il risultato precedente, come anche l'equazione per determinare le distanze apsidali, direttamente dall'equazione (4) dell'Art. 121. Si supponga $P=\mu u^n$, allora abbiamo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u-\frac{\mu}{h^2}u^{n-2}=0.$$

Moltiplicando per $2h^2\dfrac{du}{d\theta}$ ed integrando, abbiamo

$$h^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right\}=v^2=\frac{2\mu}{n-1}u^{n-1}+C.$$

Si supponga l'elemento proiettato con una velocità eguale a q volte la velocità dall'infinito alla stessa distanza, e sia c il valore iniziale di u, allora quando $u=c$,

$$v^2=\frac{2\mu q^2}{n-1}c^{n-1} \text{ (Art. 95)};$$

onde
$$C=(q^2-1)\frac{2\mu}{n-1}c^{n-1};$$

e quindi
$$h^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right\}=\frac{2\mu}{n-1}\left\{u^{n-1}+(q^2-1)c^{n-1}\right\}.$$

Per determinare le distanze apsidali dobbiamo porre $\frac{du}{d\theta} = 0$, il che dà

$$u^{n-1} - \frac{h^2(n-1)}{2\mu} u^2 + (q^2 - 1) c^{n-1} = 0.$$

La forma di questa equazione mostra che essa può avere al più due radici positive, le quali sono perciò le due distanze apsidali.

Benchè non vi possano essere più di due distanze apsidali, vi può essere un numero qualunque di apsidi, e l'angolo tra due distanze apsidali consecutive si chiama l'angolo apsidale. Generalmente, per determinare quest'angolo, si deve trovare prima l'equazione dell'orbita per il caso particolare che si considera; ma l'angolo apsidale si può determinare approssimativamente per ogni legge di forza, senza trovare prima la forma dell'orbita, se supponiamo che essa non differisca molto da un circolo.

134. *Un elemento si rivolge in un'orbita che è molto prossimamente circolare, ed è sollecitato da una forza centrale che varia come una funzione qualunque della distanza ed è diretta verso il centro del circolo; determinare l'angolo apsidale.*

Se poniamo P nella forma $\mu u^2 \varphi(u)$ l'equazione differenziale dell'orbita è

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{\mu}{h^2} \varphi(u) = 0.$$

Se l'orbita fosse circolare, avremmo

$$u = c$$

e

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0,$$

nel qual caso

$$c - \frac{\mu}{h^2} \varphi(c) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a).$$

Quando l'orbita è molto prossimamente circolare possiamo porre $u = c + x$, in cui x è sempre molto piccolo. Quindi

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + c + x - \frac{\mu}{h^2} \varphi(c + x) = 0,$$

o

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + c + x - \frac{\mu}{h^2} \{ \varphi(c) + x\varphi'(c) \} = 0, \quad \text{prossimamente;}$$

ed (a) ci abilita a ridurre questa a

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x\left(1 - \frac{\mu\varphi'(c)}{h^2}\right) = 0,$$

o, con una seconda applicazione di (a),

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \left\{1 - \frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)}\right\} x = 0,$$

l'integrale della quale è (Art. 81)

$$x = A \cos\left[\sqrt{\left\{1 - \frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)}\right\}}\, \theta + B\right].$$

Quindi il valore generale di θ che rende $\frac{dx}{d\theta} = 0$, è dato dall'equazione

$$\sqrt{\left\{1 - \frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)}\right\}}\, \theta + B = n\pi,$$

n essendo un intero qualunque; e per conseguenza la differenza tra due valori successivi qualunque di θ è

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left\{1 - \frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)}\right\}}},$$

l'angolo apsidale approssimato.

Così se la forza varia direttamente come l'n^{ma} potenza della distanza, abbiamo

$$\mu u^2 \varphi(u) = \mu u^{-n}; \quad \text{e} \quad \varphi(u) = u^{-n-2},$$

onde $$\varphi'(u) = -(n+2)\, u^{-n-3},$$

e l'angolo apsidale è

$$\frac{\pi}{\sqrt{(3+n)}}.$$

Questo mostra che n non può essere minore di -3, o che la forza non deve variare secondo una potenza inversa della distanza maggiore della terza, se il circolo col centro nel centro di forza deve essere un'approssimazione alla traiettoria dell'elemento: e l'investigazione fornisce un esempio semplice della determinazione della *Stabilità Cinetica*, che non possiamo discutere in questo trattato elementare.

Per trovare la legge della forza affinchè l'angolo apsidale nell'orbita prossimamente circolare sia eguale ad un angolo dato, α supponiamo, abbiamo

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left\{1-\frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)}\right\}}}=\alpha;$$

dalla quale $$\frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{\pi^2}{\alpha^2}\right);$$

o, con l'integrazione,

$$\log\frac{\varphi(c)}{C}=\left(1-\frac{\pi^2}{\alpha^2}\right)\log c,$$

onde $$\varphi(c)=Cc^{1-\frac{\pi^2}{\alpha^2}};$$

e quindi la legge della forza, $\mu u^2\varphi(u)$, è $\mu u^{3-\frac{\pi^2}{\alpha^2}}$.

Così per $\alpha=\pi$ abbiamo il quadrato inverso della distanza, per $\alpha=\frac{\pi}{2}$ la legge della distanza diretta, mentre $\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ corrisponde ad una forza centrale *costante*.

135. *Un elemento è proiettato da un dato punto in una data direzione e con una data velocità, e si muove sotto l'azione di una forza centrale che varia inversamente come il quadrato della distanza; determinare l'orbita.*

Abbiamo $P=\mu u^2$, e quindi

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u-\frac{\mu}{h^2}=0,$$

o $$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)+\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)=0;$$

l'integrale della quale è

$$u-\frac{\mu}{h^2}=A\cos(\theta+B),$$

o, come si suole scrivere,

$$u=\frac{\mu}{h^2}\left\{1+e\cos(\theta-\alpha)\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Questa dà $$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{h^2} e \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Sia R la distanza del punto di proiezione dal centro; β l'angolo, e V la velocità, di proiezione; allora quando $\theta=0$,

$$u = \frac{1}{R}, \quad \cot\beta = -\left(\frac{1}{u}\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0}.$$

Quindi, da (1) $$\frac{h^2}{\mu R} - 1 = e\cos\alpha,$$

e, da (2), $$\frac{h^2}{\mu R}\cot\beta = -e\operatorname{sen}\alpha.$$

Da queste, $$\tan\alpha = \frac{h^2\cot\beta}{\mu R - h^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3),$$

ed $$e^2 = \frac{h^4}{\mu^2 R^2}\operatorname{cosec}^2\beta - \frac{2h^2}{\mu R} + 1 \dots\dots\dots\dots (4).$$

Ma $h^2 = V^2 R^2 \operatorname{sen}^2\beta$, Art. 128;

perciò $$\tan\alpha = \frac{V^2 R \operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\mu - V^2 R \operatorname{sen}^2\beta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3')$$

ed $$1 - e^2 = \frac{V^2 R^2 \operatorname{sen}^2\beta}{\mu}\left(\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu}\right) \dots\dots\dots (4').$$

Ora (1) è l'equazione polare generale di una sezione conica rispetto al fuoco; e, siccome la sua natura dipende dal valore dell'eccentricità e data da (4'), vediamo che

se $V^2 > \frac{2\mu}{R}$, $e > 1$, e l'orbita è un'iperbole,

$V^2 = \frac{2\mu}{R}$, $e = 1$, ... una parabola,

$V^2 < \frac{2\mu}{R}$, $e < 1$, ... un'ellisse.

136. Per l'Art. 95, il quadrato della velocità dall'infinito alla distanza R, per la legge di forza che stiamo considerando, è $\frac{2\mu}{R}$, e le condizioni precedenti si possono esprimere perciò più concisamente dicendo che l'orbita sarà un'iperbole, una parabola, o

un'ellisse, secondo che la velocità di proiezione è maggiore, eguale, o minore della velocità dall'infinito. Si trovano illustrazioni di questa proposizione nei casi delle comete e degli sciami meteorici.

La velocità di un elemento che si muove in un circolo si prende spesso come termine di paragone per valutare le velocità dei corpi nelle loro orbite. Per la legge di gravitazione della forza, della quale ora si tratta, il quadrato della velocità in un circolo di raggio R è $\frac{\mu}{R}$; e le condizioni precedenti si possono esprimere in altra forma dicendo che l'orbita sarà un'iperbole, una parabola, o un'ellisse, secondo che la velocità di proiezione è maggiore, eguale, o minore di $\sqrt{2}$ volte la velocità in un circolo alla stessa distanza.

137. Supponendo che l'orbita sia un'ellisse, otterremo il suo asse maggiore ed il lato retto nel modo più facile con un diverso procedimento nell'integrare l'equazione differenziale. Moltiplicandola per $2h^2 \frac{du}{d\theta}$ ed integrando, otteniamo

$$h^2 \left\{ \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right\} = v^2 = C + 2\, u.$$

Ma quando $u = \frac{1}{R}$, $v = V$; il che dà

$$C = V^2 - \frac{2\mu}{R};$$

quindi
$$h^2 \left\{ \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right\} = v^2 = V^2 - \frac{2\mu}{R} + 2\mu u \;\ldots\ldots\ldots\; (5).$$

Ora per determinare le distanze apsidali, dobbiamo porre

$$\frac{du}{d\theta} = 0;$$

e questa ci dà la condizione

$$u^2 - \frac{2\mu}{h^2} u + \frac{2\mu}{h^2 R} - \frac{V^2}{h^2} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6),$$

che è un'equazione quadratica le di cui radici sono i valori reciproci delle due distanze apsidali. Ma se a è il semiasse maggiore, e l'eccentricità, queste distanze sono

$$a\,(1 - e) \quad \text{ed} \quad a\,(1 + e).$$

Quindi, siccome il coefficiente del secondo termine di (6) è la somma delle radici con i loro segni mutati, abbiamo

$$\frac{1}{a(1-e)}+\frac{1}{a(1+e)}=\frac{2\mu}{h^2};$$

o

$$a(1-e^2)=\frac{h^2}{\mu}\text{ .... (7).}$$

E, siccome il terzo termine è il prodotto delle radici,

$$\frac{1}{a^2(1-e^2)}=\frac{2\mu}{h^2R}-\frac{V^2}{h^2}:$$

o

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{R}-\frac{V^2}{\mu}\text{ .... (8).}$$

Sostituendo quindi $\frac{\mu}{a}$ per $\frac{2\mu}{R}-V^2$ in (5), abbiamo

$$v^2=\mu\left(2u-\frac{1}{a}\right)\text{ .... (9).}$$

Le equazioni (7) ed (8) danno il lato retto e l'asse maggiore dell'orbita, e mostrano che l'asse maggiore è indipendente dalla direzione della proiezione.

L'equazione (9) dà un'utile espressione per la velocità in un punto qualunque.

138. Il tempo per descrivere un dato angolo si deve ottenere dalla formola,

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h$$

$$=\sqrt{\{\mu a(1-e^2)\}}\text{, per l'equazione (7).}$$

Da questa, combinata con l'equazione polare di una sezione conica rispetto al fuoco, abbiamo

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{r^2}{\sqrt{\{\mu a(1-e^2)\}}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}\right)}\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2};$$

misurando l'angolo dall'apside più vicino. Per integrare questa, sia

$$\Theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}.$$

$$\text{Allora}\quad \frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{\cos\theta+e}{(1+e\cos\theta)^2}=\frac{\frac{1}{e}(1+e\cos\theta)-\frac{1-e^2}{e}}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{e}\frac{1}{1+e\cos\theta}-\frac{1-e^2}{e}\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2};$$

$$\text{onde}\int\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=-\frac{e\Theta}{1-e^2}+\frac{1}{1-e^2}\int\frac{d\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$=-\frac{e}{1-e^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}+\frac{1}{1-e^2}\int\frac{\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(1+e)+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}};$$

$$=-\frac{e}{1-e^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}+\frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\tan^{-1}\left\{\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}\tan\frac{\theta}{2}\right\},$$

(se $e<1$);

$$o=\frac{e}{e^2-1}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}-\frac{1}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\log\left\{\frac{\sqrt{(e+1)}\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{(e-1)}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{(e+1)}\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{(e-1)}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right\}$$

(se $e>1$).

Quindi il tempo per descrivere, intorno al fuoco, un angolo θ misurato dall'apside più vicino è, nell'ellisse,

$$\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}\tan\frac{\theta}{2}\right\}-e\sqrt{(1-e^2)}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}\right];$$

e, nell'iperbola,

$$\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[\log\left\{\frac{\sqrt{(e+1)}\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{(e-1)}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{(e+1)}\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{(e-1)}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right\}+e\sqrt{(e^2-1)}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}\right].$$

139. Nella parabola, se d è la distanza apsidale, l'integrale diviene

$$\{\text{poichè } e=1,\ a(1-e)=d,\ a(1-e^2)=2d\},$$

$$t=\sqrt{\frac{8d^3}{\mu}}\int\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{8d^3}{\mu}}\int\frac{1}{4}\sec^4\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{2d^3}{\mu}}\int\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)d\tan\frac{\theta}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{2d^3}{\mu}}\left(\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right).$$

140. Dal risultato per l'ellisse vediamo che il tempo periodico è $2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$. Questo si potrebbe anche trovare dalla considerazione dell'equabile descrizione delle aree dal raggio vettore.

Così
$$T=\frac{2\text{ area dell'ellisse}}{h}$$

$$=\frac{2\pi a^2\sqrt{(1-e^2)}}{\sqrt{\{\mu a(1-e^2)\}}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Nella notazione comunemente impiegata, abbiamo

$$T=\frac{2\pi}{n}.$$

in cui n, che si chiama il *Moto Medio*, è

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

141. Con calcolo laborioso da un'immensa serie di osservazioni dei pianeti, e di Marte in particolare, Keplero enunciò le seguenti leggi dei moti planetarii intorno al Sole.

I. I pianeti descrivono Ellissi di cui il Sole occupa un fuoco.

II. Il raggio vettore di ciascun pianeta descrive aree eguali in tempi eguali.

III. I quadrati dei tempi periodici di due pianeti qualunque sono come i cubi degli assi maggiori delle loro orbite.

142. Dalla seconda di queste leggi conchiudiamo che i pianeti sono ritenuti nelle loro orbite da una forza centrale che tende al Sole. Infatti,

Se il raggio vettore di un elemento che si muove in un piano descrive aree eguali in tempi eguali intorno ad un punto in quel piano, la forza risultante sull'elemento tende a quel punto.

Si prenda il punto per origine, e siano x, y le coordinate dell'elemento al tempo t; X, Y le forze che agiscono su di esso, risolute parallelamente agli assi; le equazioni del moto sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ma per ipotesi, se A è l'area descritta dal raggio vettore, $\frac{dA}{dt}$ è costante.

Quindi, $$2\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

Differenziando, $$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

o, per (1), $$xY - yX = 0.$$

Quindi $$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x},$$

e pel parallelogrammo delle forze (Art. 61) la risultante di X ed Y passa per l'origine.

143. Dalla prima di queste leggi segue che la legge della forza è quella del quadrato inverso della distanza.

L'equazione polare di un'Ellisse riferita al suo fuoco è

$$u = \frac{2}{l}(1 + e\cos\theta),$$

in cui l è il lato retto.

Quindi, $$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{2e}{l}\cos\theta,$$

e perciò la forza al fuoco richiesta per la descrizione dell'ellisse è (Art. 121)

$$P = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$
$$= \frac{2h^2}{l}u^2.$$

Quindi, *se l'orbita è un'ellisse, descritta intorno ad un centro di forza al fuoco, la legge della forza è quella del quadrato inverso della distanza.*

144. Dalla terza ne segue che la forza verso il Sole che agisce sull'unità di massa di ciascuno dei pianeti è la stessa per ciascun pianeta alla stessa distanza.

Infatti, nella formola nell'Art. 140, T^2 non varierà come a^3 a meno che μ non sia costante, cioè a meno che la forza *assoluta* del Sole non sia la stessa per tutt'i pianeti.

Troveremo in seguito (Cap. XII) che per più ragioni le leggi di Keplero sono solamente approssimate, ma la loro enunciazione fu sufficiente per abilitare Newton a proporre la dottrina della Gravitazione Universale; vale a dire che *ogni elemento di materia nell'universo attrae ogni altro con una forza la di cui direzione è quella della linea che li congiunge e la di cui grandezza è direttamente come il prodotto delle masse, ed inversamente come il quadrato della distanza.*

ESEMPII.

1. Un elemento descrive un'ellisse sotto l'azione di una forza diretta sempre al centro, determinare la legge della forza.

La forza P è come la distanza r. Questo esempio è l'inverso dell'Art. 119. Si vegga anche l'Art. 125.

2. Un elemento descrive una sezione conica sotto l'azione di una forza diretta sempre ad uno dei fuochi, trovare la legge della forza.

P è come $\frac{1}{r^2}$. L'inverso dell'Art. 135. Si vegga anche l'Art. 143.

3. Trovare la legge della forza, tendente al polo, sotto l'azione della quale un elemento descriva una spirale equiangola.

$$P \text{ come } \frac{1}{r^3}.$$

4. Trovare la legge della forza con la quale un elemento possa descrivere la lemniscata di Bernoulli, il centro di forza essendo il nodo.

$$P \text{ come } \frac{1}{r^7}.$$

5. Trovare la legge della forza con la quale un elemento possa descrivere un circolo, il centro di forza essendo nella circonferenza del circolo.

$$P \text{ come } \frac{1}{r^5}.$$

6. Trovare la legge della forza con la quale un elemento possa descrivere la spirale $r=a\left(\sec\frac{\theta}{n}\right)^n$, il centro di forza essendo il polo della spirale.

$$P \text{ come } \frac{1}{r^{\frac{3n-2}{n}}}.$$

[Mostrare che questo risultato non è vero per $n=1$, spiegare *perchè* è in difetto, e trovare il risultato esatto].

7. Trovare la legge della forza affinchè un elemento descriva la cicloide di Diocle, $r=2a\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$, il centro di forza essendo il polo.

$$P \text{ come } \frac{\operatorname{cosec}^2\theta}{r^3}.$$

[Qui θ si deve esprimere in termini di r nel valore di P].

8. Un elemento è proiettato da un dato punto in una data direzione con la velocità che acquisterebbe cadendo al punto di proiezione da una distanza infinita, ed è sollecitato da una forza che varia inversamente come la potenza n^{ma} della distanza, determinare l'orbita.

Sia V la velocità iniziale, β l'angolo di proiezione, ed R il valore iniziale di r. L'equazione polare della traiettoria richiesta è

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n-3}{2}} = \operatorname{cosec}\beta \cos\frac{n-3}{2}\theta.$$

9. Un elemento, sollecitato da una forza centrale che varia inversamente come la quinta potenza della distanza, è proiettato in una direzione qualunque con la velocità dall'infinito; trovare l'orbita.

La sua equazione è $r=R\operatorname{cosec}\beta\operatorname{sen}(\beta-\theta)$, β essendo l'angolo di proiezione, e la linea che congiunge il punto di proiezione col centro essendo presa per linea iniziale.

10. Un elemento sollecitato da una forza centrale che varia inversamente come la quinta potenza della distanza è proiettato da un dato punto con una velocità che sta alla velocità dall'infinito come 5 a 3, in una direzione che fa un angolo $\operatorname{sen}^{-1}\frac{2\sqrt{6}}{5}$ col raggio vettore; trovare l'orbita.

$$r=\frac{\sqrt{3}}{2}R\frac{1-e^{\sqrt{2}(\theta+\alpha)}}{1+e^{\sqrt{2}(\theta+\alpha)}};$$

in cui R è la distanza iniziale, ed α una costante da determinarsi con la posizione della linea iniziale.

11. Un elemento sollecitato da una forza, che varia in parte come la terza potenza inversa, ed in parte come la quinta potenza inversa della distanza, è proiettato con la velocità dall'infinito sotto un angolo con la distanza, di cui la tangente è $\sqrt{2}$, le forze essendo eguali al punto di proiezione; determinare l'orbita.

$$R-r=\frac{1}{\sqrt{2}}R\theta.$$

12. La forza che tende al centro di un circolo di raggio a essendo $\mu\left(r+\frac{2a^3}{r^2}\right)$, trovare la velocità con la quale un elemento descriverà il circolo; e mostrare che se la velocità è subitaneamente raddoppiata l'elemento verrà ad un apside alla distanza $3a$.

13. Se $P=2\mu\frac{u^5}{c^2}+\mu u^3$, ed un elemento è proiettato sotto un angolo di 45° con la distanza iniziale $(R=)\frac{1}{c}$, con una velocità che sta alla velocità in un circolo alla stessa distanza come $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, trovare la curva descritta.

$$r=R(1-\theta).$$

14. Se un elemento è sollecitato da una forza centrale che varia inversamente come la settima potenza della distanza, ed è proiettato da un apside con una velocità che sta alla velocità in un circolo alla stessa distanza come 1 a $\sqrt{3}$; trovare l'equazione della curva descritta

$$r^2=R^2\cos 2(\theta+\alpha).$$

15. Un elemento, sollecitato da una forza che varia inversamente come il cubo della distanza, è proiettato da un dato punto

con una velocità qualunque in una direzione qualunque; classificare le traiettorie descritte secondo le circostanze della proiezione. Le curve in questione si chiamano le *Spirali di Coles*.

16. Un elemento proiettato in un modo qualunque è sollecitato da una forza centrale che varia inversamente come la quinta potenza della distanza, determinare l'orbita.

Essendo $P = \mu u^5$, una soluzione del problema si ha in

$$r = \frac{\sqrt{\mu}}{VR \operatorname{sen} \beta} \frac{1 - e^{\theta\sqrt{2}}}{1 + e^{\theta\sqrt{2}}}.$$

Dando a $\sqrt{2}$ il segno positivo o negativo, abbiamo una spirale che ha un circolo assintotico interno o esterno, il raggio di questo cerchio essendo in tutti e due i casi $\dfrac{\sqrt{\mu}}{VR \operatorname{sen} \beta}$.

17. Un elemento è proiettato da un apside alla distanza $\sqrt{(mh)}$, ed è sollecitato da una forza centrale $\dfrac{r}{m^2} + \dfrac{h^2}{r^3}$, h essendo il doppio dell'area descritta nell'unità di tempo; trovare l'equazione dell'orbita ed il tempo per descrivere un angolo dato.

$$r^2 = \frac{mh}{1 + \theta^2}, \quad t = m \tan^{-1} \theta.$$

18. Se un elemento si muove sotto l'influenza di una forza centrale $\dfrac{\mu}{r^2} + \dfrac{v}{r^3}$, mostrare che l'equazione dell'orbita è generalmente della forma

$$r = \frac{a}{1 - e \cos (k\theta)}.$$

Nel caso in cui la proiezione ha luogo in un apside, la distanza apsidale essendo $\dfrac{\mu}{h}$, e v essendo eguale ad h^2, mostrare che l'equazione della traiettoria è

$$r = \frac{2\mu h^2}{2h^3 + \mu^2 \theta^2}.$$

e che il tempo per descrivere un angolo α è

$$\frac{1}{\alpha} \tan \theta \left(\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) \text{ in cui } \tan \theta = \frac{\mu \alpha}{\sqrt{(2h^3)}}.$$

19. Se v è la velocità, e P la forza alla distanza r in un'or-

bita centrale, e se v', P', r' sono simili quantità per il punto corrispondente del luogo del piede della perpendicolare sulla tangente, mostrare che

$$\frac{v^2}{Pr} + \frac{P'r'}{v'^2} = 2.$$

20. Un elemento legato ad un estremo di un filo elastico si muove sopra un piano orizzontale levigato, l'altro estremo del filo essendo fisso ad un punto nel piano. Se la traiettoria dell'elemento è un circolo, mostrare che il tempo periodico è come $\left(\frac{ra}{r-a}\right)^{\frac{1}{2}}$, a ed r essendo la lunghezza naturale e la distesa del filo. Se l'orbita è prossimamente circolare, trovare l'angolo tra gli apsidi.

21. Un elemento è proiettato in modo tale da descrivere una spirale reciproca di cui l'equazione è $\theta = \frac{a}{r}$; mostrare che il tempo per compiere l'n^{ma} rivoluzione $= \frac{a^2}{2n(n-1)\pi\sqrt{\mu}}$.

22. Se P è una forza centrale che attrae una catenaria, e p è la perpendicolare sulla tangente in un punto qualunque dal centro di forza; allora la forza che farebbe rivolgere un elemento nella curva formata dalla catenaria è come $\frac{P}{p^3}$.

23. Trovare il tempo in cui un elemento si muoverebbe dal vertice all'estremo del lato retto di una parabola, il centro di forza essendo al fuoco; e mostrare che se la velocità è quivi subitaneamente alterata nel rapporto di m ad 1 (m essendo < 1) il corpo procederà a descrivere un'ellisse, di cui l'eccentricità è $(1-2m^2+2m^4)^{\frac{1}{2}}$

24. Una superficie sferica è descritta nello spazio, avendo nel suo centro una forza che varia inversamente come il quadrato della distanza; mostrare che se un elemento si fa cadere da questa superficie e si proietta in una direzione qualunque in un momento qualunque della sua discesa con la velocità acquistata, esso si muoverà in un'ellisse, l'asse maggiore della quale è eguale al raggio della sfera.

25. Se l'orbita della Terra si suppone un circolo esatto, e si suppone che una cometa descriva intorno al Sole un'orbita pa-

rabolica nello stesso piano; mostrare che la cometa non può possibilmente continuare dentro l'orbita della Terra per più della $\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{ma}$ parte di un anno.

26. Se un elemento è proiettato in modo da essere sotto l'influenza di una forza centrale che varia inversamente come il quadrato della distanza, con una velocità eguale ad n volte la velocità in un circolo alla stessa distanza; l'angolo α tra l'asse maggiore e questa distanza si può determinare dall'equazione

$$\tan(\alpha - \beta) = (1 - n^2)\tan\beta ,$$

β essendo l'angolo tra il raggio vettore e la direzione della proiezione.

27. Un elemento descrive una parabola intorno ad un centro di forza (come D^{-2}) che risiede in un punto della circonferenza di una data ellisse di cui i fuochi sono nella circonferenza della parabola; mostrare che il tempo per passare da un fuoco all'altro è lo stesso, in qualunque punto della circonferenza dell'ellisse si ponga il centro di forza (Art. 160).

28. Un elemento si muove intorno ad un centro di forza, e la sua velocità in ogni punto è inversamente proporzionale alla distanza dal centro di forza; mostrare che la sua traiettoria sarà una spirale logaritmica.

29. Un elemento descrive una curva intorno ad un centro di forza, e la sua velocità è come $\frac{1}{r^n}$, trovare la legge della forza e l'equazione della traiettoria.

$$P \text{ come } \frac{1}{r^{2n+1}}, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} = \cos\{(n-1)\theta + \alpha\}.$$

30. Un elemento è proiettato in una direzione qualunque da una estremità di una linea retta uniforme, ogni elemento della quale lo attrae con una forza proporzionale alla distanza, dimostrare che l'elemento passerà per l'altra estremità.

31. Un elemento proiettato in una data direzione con una data velocità ed attratto verso un dato centro di forza ha la sua velocità in ogni punto alla velocità in un circolo alla stessa distanza come 1 a $\sqrt{2}$; trovare l'orbita descritta, la posizione dell'apside, e la legge della forza.

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{2h^2}\cos(\theta - \alpha)}, \qquad P = \frac{\mu}{r^3}.$$

32. Un elemento è proiettato da un dato punto con una data velocità ed è sollecitato da una forza centrale che varia inversamente come il quadrato della distanza; mostrare che qualunque sia la direzione della proiezione il centro dell'orbita descritta giacerà sulla superficie di una certa sfera.

33. Trovare il luogo del centro di forza affinchè una cicloide si possa descrivere con velocità uniforme, e trovare la legge della forza al centro mobile.

34. Se un elemento si rivolge in un circolo di raggio r, intorno ad un centro di forza alla distanza a dal centro del circolo, mostrare che il tempo dalla distanza r all'apside più vicino è

$$\frac{2^{\frac{3}{2}} r^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varphi}\left(2-\frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\cos^{-1}\frac{a}{2r}-\frac{a}{r}\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{4r^2}\right)}\right\},$$

in cui φ è la forza iniziale; e che il tempo periodico è

$$\frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{(r-a)\sqrt{\varphi}},$$

dove φ è la forza all'apside più vicino.

35. Mostrare che la sola legge di forza centrale per la quale la velocità in ciascun punto dell'orbita sia eguale a quella in un circolo alla stessa distanza è quella della terza potenza inversa, e che l'orbita è la spirale logaritmica.

36. Un elemento descrive un'iperbole equilatera intorno ad un centro di forza nel centro, mostrare che un angolo θ dalla linea apsidale è connesso col tempo t della sua descrizione dalla formola

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{e^{4\sqrt{\mu}t}-1}{e^{4\sqrt{\mu}t}+1}.$$

37. Se più elementi, che descrivono circoli diversi nello stesso piano intorno ad un centro di forza come D^{-3}, partono insieme dallo stesso raggio, trovare la curva in cui essi giacciono tutti quando quello che si muove nel circolo di raggio a ha compiuto una rivoluzione.

38. Se l'm^{a} potenza del tempo periodico è proporzionale all'n^{ma} potenza della velocità in un circolo, trovare la legge della forza in termini del raggio.

39. Se v è la velocità di un elemento che si rivolge in un'ellisse intorno al centro, v' la sua velocità quando la direzione del suo movimento è ad angoli retti con la prima direzione, il tempo per descrivere l'arco intercetto $= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{sen}^{-1} \frac{vv'}{\mu ab}$.

40. Un elemento si rivolge in un circolo intorno ad un centro di forza nel centro, la forza come $\frac{1}{D^2}$; la forza assoluta si aumenta subitaneamente nel rapporto di $m:1$ quando l'elemento è in un punto assegnato della sua traiettoria, e quando l'elemento giunge di nuovo allo stesso punto la forza assoluta si aumenta di nuovo nello stesso rapporto; mostrare che la traiettoria che l'elemento descriverà è un'ellisse di cui l'eccentricità

$$= \frac{m^2 - 1}{m^2}.$$

41. In una curva descritta da un elemento sotto l'azione di una forza centrale l'angolo tra il raggio vettore e la tangente varia come il tempo. Trovare la curva e la legge della forza.

42. Mostrare che l'angolo apsidale è lo stesso per differenti distanze apsidali, solamente quando la forza è come una potenza della distanza.

43. Dato $P = \frac{2a^2 h^2}{r^5} + \frac{h^2}{r^3}$, determinare la traiettoria. Mostrare che nel caso particolare della proiezione fatta alla distanza a, e con velocità $= \frac{h}{a}\sqrt{2}$, l'equazione dell'orbita è

$$r = a(1 + \theta).$$

44. La forza centrale essendo $\frac{\mu}{r^4}$ un elemento è proiettato da un apside alla distanza a con velocità $= \sqrt{\frac{2\mu}{3a^3}}$, mostrare che la traiettoria è una cardioide, e che il tempo periodico è

$$\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{3a^5}{2\mu}}.$$

45. Un elemento si rivolge in un'ellisse intorno ad un centro di forza nel fuoco; supponendo che ogni qual volta l'elemento giunge all'apside inferiore la forza assoluta si diminuisce nel

rapporto di 1 ad $1-n$; trovare l'eccentricità dell'orbita ellittica dopo p rivoluzioni, l'eccentricità primitiva essendo e.

$$\frac{1+e}{(1-n)^p}-1.$$

46. Un elemento descrive un'orbita circolare intorno ad un centro di forza situato nel centro del circolo; dimostrare che la forma dell'orbita sarà stabile o instabile secondo che il valore di $\frac{d\log P}{d\log u}$, per $u=a$, è minore o non minore di 3, P essendo la forza centrale, u il reciproco del raggio vettore, ed $\frac{1}{a}$ il raggio del circolo.

47. Se l'equazione per determinare le distanze apsidali in un'orbita centrale contiene il fattore $(u-a)^p$, mostrare che $u=a$ non può corrispondere ad un apside a meno che p non sia di una delle forme $4m+2$ o $\frac{4m+2}{2n+1}$. Se il fattore $u-a$ si trova due volte, allora a sarà una radice dell'equazione

$$\varphi(u)-h^2u^3=0\,,$$

in cui $\varphi(u)$ è la forza centrale.

48. Esaminare accuratamente il caso di un apside in cui il centro di forza coincide col centro di curvatura. Mostrare che l'elemento descriverà, dopo il passaggio per un tale apside, un circolo intorno al centro di forza, ma che il movimento sarà instabile.

49. Un elemento è proiettato ad una distanza c da un centro fisso di forza con una velocità $\sqrt{\frac{\mu}{8c^4}}$, ed in una direzione che fa un angolo $\operatorname{sen}^{-1}\frac{c}{a}$ con la distanza; l'intensità della forza alla distanza r essendo $\frac{\mu r}{(r^2+c^2)^3}$. Mostrare che l'orbita descritta sarà un circolo.

50. Un punto descrive una parabola, di lato retto $4a$, con un'accelerazione che tende ad un punto nell'asse alla distanza c dal vertice: dimostrare che il tempo per passare dal vertice ad un punto alla distanza y dall'asse è proporzionale ad $\frac{y^3}{12ac}+y$.

51. Se un elemento descrive una parabola sotto l'azione di una

forza che tende ad un punto O sull'asse, dimostrare che l'accelerazione in un punto qualunque P è $\mu\left(\frac{1}{OP}+\frac{1}{Op}\right)^{-2} OP^{-2}$, p essendo il punto d'intersezione di PO prolungato con la curva.

Inoltre dimostrare che il tempo per passare da una estremità dell'ordinata per O all'altra $=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{\mu}}$.

52. Un elemento è proiettato da un dato punto con una data velocità ed in una data direzione inclinata alla verticale. Trovare dove debba essere situato un centro di forza di cui l'attrazione assoluta è μ, affinchè l'elemento descriva una parabola. Mostrare che la sua distanza dal punto di proiezione deve essere $v \pm (v^2 - 4\mu g)^{\frac{1}{2}}$. Come accade che vi possono essere due valori per questa distanza?

53. Se l'accelerazione varia inversamente come il quadrato della distanza, dimostrare che vi sono due direzioni iniziali nelle quali un elemento si può muovere in modo che la sua linea degli apsidi coincida con una linea data. Se α_1, α_2 sono gli angoli che queste direzioni fanno con la distanza iniziale c, e $2a$ è la lunghezza della linea degli apsidi, dimostrare che

$$\cot\alpha_1 \cdot \cot\alpha_2 = \frac{c}{a} - 1.$$

54. Un elemento si muove sotto l'influenza di una forza ripulsiva che varia come la distanza da un punto fisso; mostrare che l'equazione della traiettoria descritta è

$$x\sqrt{y^2 - b^2} - y\sqrt{x^2 - a^2} = c,$$

in cui a, b, c sono costanti, e determinare la curva rappresentata da questa equazione.

55. Un elemento P descrive una cicloide ABC sotto l'azione di una forza situata in O il punto medio della base. Se si tira PM perpendicolare all'asse OB, e la tangente PT incontra OB in T: la velocità angolare della tangente varierà inversamente come $OM \cdot OT$.

56. Mostrare che se si descrive un'ellisse sotto l'azione di una forza f al fuoco S, ed una forza f' al fuoco H ed $SP=r$, $HP=r'$.

$$\frac{df'}{dr'} - \frac{df}{dr} = 2\left(\frac{f}{r} - \frac{f'}{r'}\right).$$

57. Un'elemento descrive un'ellisse sotto l'azione di due forze

che tendono ai fuochi le quali stanno tra loro in ogni punto inversamente come le distanze focali: dimostrare che la velocità varia come la perpendicolare dal centro sulla tangente, e che il tempo periodico $= \frac{\pi}{k}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, ka, kb essendo le velocità nelle estremità degli assi.

58. Dimostrare che un elemento può descrivere una parabola sotto l'azione di una forza ripulsiva nel fuoco che varia come la distanza, e di un'altra forza parallela all'asse sempre di una grandezza tripla della prima; e che se due elementi eguali descrivono la stessa parabola sotto l'azione di queste forze, le loro direzioni del movimento s'intersegheranno sempre in una parabola fissa omofocale.

59. Dimostrare che una lemniscata può essere descritta liberamente da un elemento sotto l'azione di due forze centrali di eguali intensità ai fuochi, ciascuna variando inversamente come la distanza; e che la velocità sarà sempre eguale a $\sqrt{\frac{4\mu}{3}}$, $\frac{\mu}{r}$ essendo l'accelerazione di ciascuna forza sopra un elemento alla distanza r.

60. Un elemento è proiettato da un apside sotto l'azione della forza $\frac{f(r)}{r^3}$ con una velocità $\frac{(1+n)\sqrt{f(a)}}{a}$, n essendo molto piccolo ed a la distanza iniziale, determinare l'angolo apsidale e l'altra distanza apsidale.

61. Se r, p sono il raggio vettore e la perpendicolare sulla tangente in un punto qualunque della curva descritta da un elemento sotto l'azione di una forza P verso il polo, e di una forza T lungo la tangente, mostrare che

$$\frac{2Tp^2r}{\sqrt{r^2-p^2}} = \frac{d}{dr}\left(p^3P\frac{dr}{dp}\right).$$

62. La pedale di una curva rispetto ad un punto si definisce essere il luogo del piede della perpendicolare abbassata dal punto sopra ogni tangente della curva, e la pedale della pedale rispetto allo stesso punto si chiama la seconda pedale, e così di seguito; un elemento descrive l'n^{ma} pedale liberamente sotto l'azione di una forza che tende a quel punto: trovare la legge della forza. Se la curva è un'iperbole rettangolare, e le pedali si formano rispetto al suo centro, dimostrare che l'n^{ma} pedale sarà

l'orbita di un elemento che si muove sotto l'azione di una forza che varia come $r^{-\frac{6n+1}{2n-1}}$ in cui r è la distanza dal centro di forza.

63. Una curva descritta da un elemento sotto l'azione di una forza centrale è tale che, se ad un momento qualunque la velocità componente secondo il raggio vettore è distrutta da un impulso lungo il raggio vettore, l'elemento procederà a descrivere un circolo: dimostrare che la curva è una spirale reciproca.

64. Un elemento descrive un'orbita intorno ad un centro di forza in un tempo periodico P. Si tirino da un punto delle linee rette per rappresentare le accelerazioni dell'elemento ad intervalli eguali di tempo τ, durante una completa rivoluzione. Se $P=n\tau$, in cui n è un numero intero indefinitamente grande, mostrare che queste linee rette rappresenteranno un sistema di forze in equilibrio. Mostrare ancora che se la forza varia direttamente come la distanza, il risultato è vero se n non è grande.

65. Un elemento descrive un'orbita intorno ad un centro di forza. Se il centro di forza è rimpiazzato dall'elemento, e l'orbita per un numero completo qualunque di rivoluzioni da un sottile filo metallico la di cui sezione varia inversamente come la velocità nell'orbita corrispondente, ed ogni punto del quale attrae con la stessa legge come la forza faceva, mostrare che l'elemento sarà in equilibrio: determinare ancora la natura di questo equilibrio (1) quando la forza varia come la distanza, (2) quando essa varia inversamente come il quadrato della distanza.

Mostrare che se l'orbita è un'ellisse descritta intorno ad un centro di forza nel fuoco, il centro di gravità del filo è nel punto medio della distanza tra il centro e l'altro fuoco.

66. Mostrare che se la forza centrale è costante ($=f$ supponiamo) si ha la seguente relazione tra il raggio vettore ed il tempo,

$$t=\int \frac{rdr}{\sqrt{A+Br^2-2fr^3}};$$

e da questa, con l'aiuto dell'equazione del momento costante della quantità di moto, dedurre l'equazione differenziale dell'orbita. Mostrare ancora come si può determinare l'angolo apsidale.

CAPITOLO VI.

Moto Ellittico.

145. In questo capitolo ci proponiamo di dedurre dai risultati del precedente alcune delle proprietà delle Orbite Ellittiche e Paraboliche descritte intorno ad un centro di forza nel fuoco. È questo un problema di grande interesse, essendo stato dimostrato con l'effettiva osservazione che le orbite dei pianeti e delle comete sono in generale (trascurando i piccoli effetti delle forze perturbatrici) ellissi o molto leggermente eccentriche, o di così grande eccentricità da potersi appena distinguere da parabole. Vi sono, è vero, alcune comete le di cui orbite sono ellissi moderatamente eccentriche, ed alcune di cui le orbite sono iperboli; ma, siccome nel loro caso il problema diviene molto complicato, ed i metodi approssimati che qui impiegheremo sono inapplicabili ai loro movimenti, si è stimato conveniente di omettere la considerazione di questi casi.

146. Per l'intelligibilità di quanto segue sarà necessario di premettere alcune definizioni.

Supponiamo che APA' sia un'orbita ellittica descritta intorno ad un centro di forza nel fuoco S. Supponiamo inoltre che sia P la posizione dell'elemento ad un tempo qualunque t. Si tiri PM perpendicolare all'asse maggiore ACA', e si prolunghi sino ad incontrare il circolo ausiliario nel punto Q. Sia C il centro comune delle curve. Si unisca CQ.

Quando l'elemento mobile è in A, il punto dell'orbita più vicino ad S, si dice che esso è nel *Perielio*.

L'angolo ASP, o l'eccesso della longitudine dell'elemento su quella del perielio, si chiama l'*Anomalia Vera*. Dinotiamola con θ.

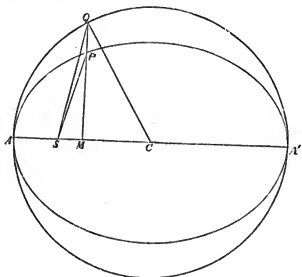
L'angolo ACQ si chiama l'*Anomalia Eccentrica*, e si dinota generalmente con u. E se $\frac{2\pi}{n}$ è il tempo di una completa rivoluzione, nt è la misura circolare di un angolo imaginario chiamato l'*Anomalia Media;* esso sarebbe evidentemente l'anomalia vera se la velocità angolare dell'elemento intorno ad S fosse uniforme.

147. È facile dalle note proprietà dell'ellisse di dedurre delle relazioni tra l'anomalia media e l'eccentrica, ed anche tra la vera e l'eccentrica; questo passiamo a fare.

46

Trovare la relazione tra l'anomalia media e l'eccentrica.

Nella figura QCA è l'anomalia eccentrica, e l'anomalia me-

dia sta evidentemente a 2π come l'area PSA sta all'intera area dell'orbita ellittica (Art. 140–146), o come l'area QSA all'area del circolo ausiliario.

Ora l'area QSA = area QCA − area QCS

$$= \frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a \cdot ae \operatorname{sen} u$$

(a essendo il semiasse maggiore dell'orbita ed e l'eccentricità)

$$= \frac{a^2}{2}(u - e \operatorname{sen} u).$$

Quindi $$\frac{nt}{2\pi} = \frac{\frac{a^2}{2}(u - e \operatorname{sen} u)}{\pi a^2};$$

o $$nt = u - e \operatorname{sen} u.$$

148. *Trovare la relazione tra l'anomalia vera e l'eccentrica.*

Abbiamo (dalle Coniche)

$$SP = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}.$$

Ma $$SP = a - eCM = a\,(1 - e\cos u).$$

Quindi $$\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta} = 1 - e\cos u;$$

quindi $$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u},$$

e $$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - e\cos u - \cos u + e}{1 - e\cos u + \cos u - e}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+e)(1-\cos u)}{(1-e)(1+\cos u)}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\tan\frac{u}{2}.$$

Le due equazioni che ora abbiamo trovato sono sufficienti per la soluzione del nostro problema; esse si ottengono alle volte nel modo seguente.

149. Il problema diretto nel moto ellittico è

Trovare il tempo del movimento di un pianeta o di una cometa per una porzione qualunque della sua orbita ellittica.

L'equazione dell'orbita ci dà

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos\theta}.$$

E dalla descrizione delle aree eguali in tempi eguali, abbiamo

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{\sqrt{\{\mu a\,(1-e^2)\}}}{r^2}.$$

Da queste equazioni abbiamo

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\,\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{n}\,\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}$$

se $\frac{2\pi}{n}$ è il periodo della rivoluzione (Art. 140).

Quindi se t_1 è il tempo per descrivere un arco misurato da θ_1 dal perielio,

$$nt_1 = (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2},$$

o sia

$\left(\text{osservando che } \cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}, \text{ ed } 1 = \cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)$

$$= (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{\left\{(1+e)\cos^2\frac{\theta}{2} + (1-e)\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right\}^2}$$

$$= 2(1-e^2)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\theta_1} \frac{\sec^2\frac{\theta}{2}\,\dfrac{d\tan\frac{\theta}{2}}{d\theta}\,d\theta}{\left\{(1+e) + (1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right\}^2}.$$

Per semplificare questo, poniamo

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\tan\frac{\varphi}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

(supposizione che ci condurrà evidentemente ad una formola già dimostrata, ed è chiaro che φ rappresenterà l'anomalia eccentrica).

Abbiamo

$$nt_1 = 2(1-e^2)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\varphi_1} \frac{1+\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{\varphi}{2}}{(1+e)^2\sec^4\frac{\varphi}{2}} \frac{d}{d\varphi}\left\{\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\tan\frac{\varphi}{2}\right\} d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi_1} \left\{(1-e)\cos^2\frac{\varphi}{2} + (1+e)\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right\} d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi_1} (1-e\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$= \varphi_1 - e\operatorname{sen}\varphi_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quando θ_1 è dato possiamo calcolare φ_1 per mezzo di (1), e quindi t_1 per mezzo di (2).

Poichè (1) e (2) ci danno il tempo del passaggio per un arco dal perielio che sottende un angolo qualunque θ_1 al fuoco, è chiaro che abbiamo ora i mezzi per trovare il tempo per descrivere una data porzione qualunque dell'orbita, ed abbiamo così la completa soluzione del problema diretto.

150. Il problema inverso, che è il più importante, si è di trovare i valori di θ ed r come funzioni di t, sicchè si possa determinare per ogni dato tempo la direzione e la lunghezza del raggio vettore di un pianeta. Questo generalmente porta il nome di Problema di Keplero.

151. Prima di entrare nello sviluppo sistematico di u, r e θ in termini di t dalle nostre equazioni, è utile osservare che se e è così piccola da potersi trascurare i termini superiori al suo quadrato, possiamo ottenere facilmente degli sviluppi esatti sino ai primi tre termini.

Così
$$\begin{aligned} u &= nt + e \operatorname{sen} u \\ &= nt + e \operatorname{sen}(nt + e \operatorname{sen} nt) \text{ prossimamente}, \\ &= nt + e \operatorname{sen} nt + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2nt. \end{aligned}$$

Inoltre
$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos u \\ &= 1 - e \cos(nt + e \operatorname{sen} nt) \\ &= 1 - e \cos nt + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2nt). \end{aligned}$$

Ed
$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\{\mu a (1 - e^2)\}},$$

che si può scrivere
$$\frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 + e \cos\theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = na^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}},$$

o
$$(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} (1 + e \cos\theta)^{-2} \frac{d\theta}{dt} = n.$$

Ritenendo le potenze di e inferiori alla terza
$$\left(1 - 2e \cos\theta + \frac{3}{2} e^2 \cos 2\theta\right) \frac{d\theta}{dt} = n,$$

o
$$nt = \theta - 2e \operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4} e^2 \operatorname{sen} 2\theta;$$

onde
$$\begin{aligned} \theta &= nt + 2e \operatorname{sen}\theta - \frac{3}{4} e^2 \operatorname{sen} 2\theta \\ &= nt + 2e \operatorname{sen}(nt + 2e \operatorname{sen} nt) - \frac{3}{4} e^2 \operatorname{sen} 2nt \\ &= nt + 2e \operatorname{sen} nt + 4e^2 \cos nt \operatorname{sen} nt - \frac{3}{4} e^2 \operatorname{sen} 2nt \\ &= nt + 2e \operatorname{sen} nt + \frac{5}{4} e^2 \operatorname{sen} 2nt. \end{aligned}$$

152. Problema di Keplero. *Trovare* r *e* θ *come funzioni di* t *dalle equazioni*

$$r = a\,(1 - e \cos u) \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; (1);$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\tan\frac{u}{2} \;\dots\dots\dots\dots\dots\; (2);$$

$$nt = u - e \operatorname{sen} u \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; (3).$$

Queste equazioni evidentemente danno r, θ, e t direttamente per ogni valore assegnato di u, ma questo è di poco valore in pratica. Il metodo di soluzione che passiamo a dare è quello di Lagrange, ed il suo principio generale è questo:

Possiamo sviluppare θ dall'equazione (2) in una serie ascendente secondo le potenze di una piccola quantità, una funzione di e, i coefficienti di queste potenze contenendo u ed i seni dei multipli di u. Ora pel teorema di Lagrange possiamo dall'equazione (3) esprimere u, $1 - e\cos u$, $\operatorname{sen} u$, $\operatorname{sen} 2u$, etc. in serie ascendenti secondo le potenze di e, i di cui coefficienti sono seni e coseni dei multipli di nt. Quindi sostituendo questi valori nell'equazione (1) e nello sviluppo di (2), abbiamo r e θ espressi in serie i di cui termini decrescono rapidamente, ed i coefficienti dei quali sono seni e coseni dei multipli di nt. Questa è la completa soluzione pratica del problema.

153. *Esprimere l'anomalia vera come una funzione dell'eccentrica.*

Sostituendo in (2) le espressioni esponenziali per le tangenti, e scrivendo i per $\sqrt{-1}$, abbiamo

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\frac{e^{\frac{iu}{2}} - e^{-\frac{iu}{2}}}{e^{\frac{iu}{2}} + e^{-\frac{iu}{2}}},$$

onde $$e^{i\theta} = \frac{e^{iu}\{\sqrt{(1+e)}+\sqrt{(1-e)}\}+\{\sqrt{(1-e)}-\sqrt{(1+e)}\}}{e^{iu}\{\sqrt{(1-e)}-\sqrt{(1+e)}\}+\{\sqrt{(1-e)}+\sqrt{(1+e)}\}};$$

o, ponendo $$\lambda = \frac{\sqrt{(1+e)} - \sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)} + \sqrt{(1-e)}} = \frac{e}{1 + \sqrt{(1-e^2)}},$$

$$e^{i\theta} = e^{iu}\cdot\frac{1 - \lambda e^{-iu}}{1 - \lambda e^{iu}}.$$

Prendendo il logaritmo di ciascun membro e dividendo per i,

$$0 = u + \frac{\lambda}{i}\left\{e^{iu} - e^{-iu}\right\} + \frac{\lambda^2}{2i}\left\{e^{2iu} - e^{-2iu}\right\} + \dots$$

$$= u + 2\left(\lambda \operatorname{sen} u + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen} 2u + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen} 3u + \text{etc.}\right) \dots\dots\dots (4).$$

154. *Sviluppare* u *in termini di* t.

Se abbiamo

$$y = z + x\,\varphi(y) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5),$$

abbiamo, pel Teorema di Lagrange, lo sviluppo

$$f(y) = f(z) + x\varphi(z)\,f'(z) + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d}{dz}\left\{\varphi(z)^2 f'(z)\right\}$$

$$+ \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d}{dz}\right)^2\left\{\varphi(z)^3 f'(z)\right\} + \text{etc.} \dots\dots\dots (6).$$

Ora l'equazione (3) si può porre nella forma

$$u = nt + e \operatorname{sen} u,$$

che è identica con (5) se

$$y = u, \quad z = nt, \quad x = e, \quad \text{e} \quad \varphi(y) = \operatorname{sen} y.$$

Inoltre, siccome è lo sviluppo di u che vogliamo, dobbiamo porre

$$f(u) = u, \quad \text{ed} \quad f'(u) = 1. \quad \text{Quindi, da (6)}$$

$$y = z + x \operatorname{sen} z + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d}{dz}(\operatorname{sen}^2 z) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d}{dz}\right)^2(\operatorname{sen}^3 z) + \text{etc.};$$

e, sostituendo per le potenze di $\operatorname{sen} z$ le loro espressioni corrispondenti in seni e coseni dei multipli di z,

$$y = z + x \operatorname{sen} z + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1-\cos 2z}{2}\right) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d}{dz}\right)^2\left(\frac{3 \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} 3z}{4}\right)$$

$$+ \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d}{dz}\right)^3\left(\frac{3 - 4\cos 2z + \cos 4z}{8}\right) + \text{etc.}$$

$$= z + x \operatorname{sen} z + \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} 2z + \frac{x^3}{8}(3 \operatorname{sen} 3z - \operatorname{sen} z) + \dots$$

o, sostituendo per x, y, z i loro valori come sopra,

$$u = nt + e \operatorname{sen} nt + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2nt + \frac{e^3}{8} (3 \operatorname{sen} 3nt - \operatorname{sen} nt)$$

$$+ \frac{e^4}{6} (2 \operatorname{sen} 4nt - \operatorname{sen} 2nt) + \text{etc.} \dots (7).$$

Per sviluppare $\operatorname{sen} u$, ricorriamo all'equazione (3), che dà, dopo l'eliminazione di u per mezzo di (7),

$$\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} nt + \frac{e}{2} \operatorname{sen} 2nt + \frac{e^2}{8} (3 \operatorname{sen} 3nt - \operatorname{sen} nt) + \text{etc.} (8).$$

Con l'applicazione del teorema di Lagrange all'equazione (3), è facile dedurre le espressioni seguenti:

$$\operatorname{sen} 2u = \operatorname{sen} 2nt + e (\operatorname{sen} 3nt - \operatorname{sen} nt) + e^2 (\operatorname{sen} 4nt - \operatorname{sen} 2nt)$$

$$+ \frac{e^3}{24} (4 \operatorname{sen} nt - 27 \operatorname{sen} 3nt + 25 \operatorname{sen} 5nt) + \text{etc.}$$

$$\operatorname{sen} 3u = \operatorname{sen} 3nt + \frac{3e}{2} (\operatorname{sen} 4nt - \operatorname{sen} 2nt)$$

$$+ \frac{e^2}{8} (15 \operatorname{sen} 5nt - 18 \operatorname{sen} 3nt + 3 \operatorname{sen} nt) + \text{etc.}$$

etc. = etc.

Sostituendo questi valori in (4), otteniamo il valore di θ, che contiene però la quantità λ. Se prendiamo per suo valore approssimato $\frac{e}{2} + \frac{e^3}{8}$, e facciamo le richieste sostituzioni, otteniamo

$$\theta = nt + \left(2e - \frac{1}{4} e^3\right) \operatorname{sen} nt + \frac{5}{4} e^2 \operatorname{sen} 2nt + \frac{13}{12} e^3 \operatorname{sen} 3nt + \dots\dots$$

che è esatto sino ad e^3.

155. Nel procedere innanzi con lo sviluppo, diviene necessario di sviluppare λ e le sue potenze in serie ascendenti secondo le potenze di e. Questo si fa subito come segue.

Abbiamo

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{(1 - e^2)}} = \frac{e}{E} \text{ supponiamo.}$$

Quindi $$E = 2 - \frac{e^2}{E},$$

dalla quale, col Teorema di Lagrange,

$$E^{-p} = \frac{1}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}} e^2 + \frac{p\cdot(p+3)}{2\cdot 2^{p+4}} e^4 + \text{etc.};$$

e così il valore di λ^p, essendo $e^p E^{-p}$, è conosciuto.

Il valore esatto di θ sino alla quinta potenza di e si trova così essere

$$nt + 2e \operatorname{sen} nt + \frac{5e^2}{4} \operatorname{sen} 2nt + \frac{e^3}{2^2\cdot 3}(13 \operatorname{sen} 3nt - 3 \operatorname{sen} nt)$$

$$+ \frac{e^4}{2^5\cdot 3}(103 \operatorname{sen} 4nt - 44 \operatorname{sen} 2nt)$$

$$+ \frac{e^5}{2^6\cdot 3\cdot 5}(1097 \operatorname{sen} 5nt - 645 \operatorname{sen} 3nt + 50 \operatorname{sen} nt).$$

156. *Sviluppare* r *in termini di* t.

Da (1) è evidente che tutto ciò che dobbiamo fare si è di sviluppare col Teorema di Lagrange, $1 - e\cos u$ come una funzione di t, da $nt = u - e \operatorname{sen} u$.

Sviluppare (1 − e cos u) *in termini di* t.

Qui $$f(y) = 1 - e\cos y\,,$$
$$f'(y) = e \operatorname{sen} y\,;$$

e la forma di φ è la stessa come prima; quindi

$$1 - e\cos y = (1 - e\cos z) + x \operatorname{sen} z\,(e \operatorname{sen} z)$$
$$+ \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d}{dz}(\operatorname{sen}^2 z\cdot e \operatorname{sen} z) + \ldots\ldots$$

Quindi, come sopra, sostituendo per le potenze del seno le loro espressioni equivalenti in seni e coseni di archi multipli, differenziando, e sostituendo u per y, nt per z, ed e per x, abbiamo

$$1 - e\cos u = \frac{r}{a} = 1 - e\cos nt + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2nt)$$
$$+ \frac{e^3}{8}(3\cos nt - 3\cos 3nt)$$
$$+ \frac{e^4}{3}(\cos 2nt - \cos 4nt) + \text{etc.}$$

che dà il raggio vettore in termini del tempo.

157. Nel caso di un moto parabolico i metodi precedenti non sono applicabili; ma invece uno molto più semplice.

Trovare il tempo per descrivere un arco qualunque di una parabola dal vertice; il centro di forza essendo nel fuoco.

L'equazione della curva è

$$r = d \sec^2 \frac{\theta}{2}, \text{ in cui } d \text{ è la distanza perielia.}$$

E la condizione della descrizione equabile delle aree dà

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \sqrt{(2\mu d)}\ ;$$

$$t_1 = \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2\mu)}} \int_0^{\theta_1} \sec^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2} d^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \left(\tan \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta_1}{2} \right);$$

o $$nt_1 = \left(\tan \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta_1}{2} \right), \quad \text{se} \quad \sqrt{\frac{\mu}{2d^3}} = n;$$

che è l'espressione richiesta. Da questa è evidentemente facile di calcolare il tempo per descrivere un arco qualunque dell'orbita.

Il problema inverso del moto parabolico richiederebbe la risoluzione dell'equazione cubica ora trovata per $\tan \frac{\theta}{2}$ in termini del tempo. Questo però si evita facilmente formando una tavola in cui i valori corrispondenti di t e $\frac{\theta}{2}$ sono calcolati nella supposizione che $n = 1$. Se vogliamo allora risolvere il problema inverso, tutto ciò che dobbiamo fare si è di trovare il valore di θ corrispondente al numero nt. Questo sarà il valore dell'anomalia vera richiesta, e la stessa tavola si applicherà naturalmente ad ogni orbita parabolica.

158. Se l'orbita non è parabolica, ma ellittica e di eccentricità molto grande, il risultato del seguente problema diretto è alle volte utile.

Trovare il luogo di una cometa ad un dato tempo in un'orbita ellittica molto eccentrica.

Abbiamo $\frac{dt}{d\theta}=\frac{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\cdot$(Art. 149).

Sia D la distanza perielia, $D=a(1-e)$;

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{D^{\frac{3}{2}}(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sec^4\frac{\theta}{2}}{\left\{(1+e)+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right\}^2}$$

$$=\frac{D^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\{u(1+e)\}}}\sec^4\frac{\theta}{2}\left\{1+\frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{\theta}{2}\right\}^{-2}.$$

Sviluppando secondo le potenze di $(1-e)$, e trascurando le potenze di $(1-e)$ superiori alla prima; poichè $e=1$ prossimamente,

$$nt_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-e}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\theta_1}\sec^4\frac{\theta}{2}\left\{1-(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\theta_1}\frac{d\tan\frac{\theta}{2}}{d\theta}\left\{1+\tan^2\frac{\theta}{2}+(1-e)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\tan^2\frac{\theta}{2}-\tan^4\frac{\theta}{2}\right)\right\}d\theta;$$

onde

$$nt_1=\tan\frac{\theta_1}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta_1}{2}+(1-e)\left(\frac{1}{4}\tan\frac{\theta_1}{2}-\frac{1}{4}\tan^3\frac{\theta_1}{2}-\frac{1}{5}\tan^5\frac{\theta_1}{2}\right)\ \ldots\ (1).$$

Il metodo seguente è conveniente per calcolare il valore di θ_1 per un dato valore di t_1.

Supponiamo che sia θ' al tempo t_1 l'anomalia vera di una cometa che si muove in un'orbita parabolica di cui D è la distanza perielia; allora per l'Art. 157

$$nt_1=\tan\frac{\theta'}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta'}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ (2).$$

Sia $\theta_1=\theta'+x$, si sostituisca nell'equazione (1) e (siccome x è molto piccolo) si sviluppi secondo le potenze di x col Teorema di Taylor: abbiamo approssimativamente

$$nt_1=\tan\frac{\theta'}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta'}{2}+\frac{1}{2}x\sec^4\frac{\theta'}{2}+\ldots$$

$$+\frac{1}{4}(1-e)\tan\frac{\theta'}{2}\left(1-\tan^2\frac{\theta'}{2}-\frac{4}{5}\tan^4\frac{\theta'}{2}\right).$$

Da questa, per mezzo di (2), otteniamo

$$x = \frac{1}{10}(1-e)\tan\frac{\theta'}{2}\left(4 - 3\cos^2\frac{\theta'}{2} - 6\cos^4\frac{\theta'}{2}\right).$$

Per fare uso di questa formola, dobbiamo aggiungere alla tavola sopra menzionata, una colonna che dà i valori di $\frac{x}{1-e}$ corrispondenti a quelli di θ'. Prendendo allora un valore qualunque di t, cerchiamo nella seconda colonna il valore di θ' per il numero nt, e poi il valore di $\frac{x}{1-e}$ per il valore di θ' così trovato.

Siccome l'orbita è conosciuta, $1-e$ è conosciuta, quindi x e θ' sono conosciuti in termini di t, e l'anomalia vera,

o $\qquad \theta' + x \qquad$ è conosciuta.

159. *Osservazione.* In tutto ciò che precede abbiamo supposto per semplicità che l'angolo θ, che determina la posizione dell'elemento, sia misurato dall'apside più vicino; e che siano $\theta=0$, $t=0$ insieme. Questo non è usualmente il caso nelle applicazioni pratiche ai movimenti della Luna o dei pianeti, ma sia θ' la *longitudine* dell'elemento al tempo t, ϖ quella dell'apside, ε la longitudine dell'elemento al tempo $t=0$, o *l'Epoca* come generalmente si chiama; allora al tempo t la longitudine media (misurata nel piano dell'orbita) è evidentemente $nt+\varepsilon$, e l'anomalia media $nt+\varepsilon-\varpi$. Quindi per i nostri precedenti risultati

$$\theta' - \varpi = nt + \varepsilon - \varpi + 2e\,\mathrm{sen}\,(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$+ \frac{5}{4}e^2\,\mathrm{sen}\,2\,(nt + \varepsilon - \varpi) + \text{etc.}$$
$$r = a\,\{1 - e\cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \ldots\},$$

che sono le formole nell'uso generale; θ' essendo, come sopra si è osservato, la longitudine vera al tempo t.

160. *Il tempo per un arco qualunque di un'orbita parabolica, descritta intorno al fuoco, si può esprimere in termini della corda e dei raggi vettori estremi dell'arco.*

Siano r_1, θ_1, r_2, θ_2 le coordinate dei punti estremi, c la corda dell'arco. Allora, T essendo il tempo richiesto, abbiamo (Art. 157)

$$nT = \tan\frac{\theta_2}{2} - \tan\frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{3}\left(\tan^3\frac{\theta_2}{2} - \tan^3\frac{\theta_1}{2}\right),$$

o, come possiamo scrivere per semplicità,

$$= t_2 - t_1 + \frac{1}{3}(t_2^3 - t_1^3)$$

$$= \frac{1}{3}(t_2 - t_1)(3 + t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2)$$

$$= \frac{1}{3}(t_2 - t_1)\{(1 + t_1^2) + (1 + t_2^2) + (1 + t_1 t_2)\}.$$

Ora
$$1 + t_1 t_2 = \frac{\cos\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}},$$

e nel triangolo di cui la base è c, i lati r_1, r_2, e l'angolo al vertice $\theta_2 - \theta_1$, abbiamo dalla Trigonometria

$$\cos\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{r_1 r_2}}, \quad \left(\text{in cui } s = \frac{r_1 + r_2 + c}{2}\right).$$

Inoltre
$$r_1 = d\sec^2\frac{\theta_1}{2}, \quad r_2 = d\sec^2\frac{\theta_2}{2}.$$

Quindi
$$1 + t_1 t_2 = \frac{1}{d}\sqrt{\{s(s-c)\}}.$$

E
$$t_2 - t_1 = \sqrt{\{1 + t_2^2 + 1 + t_1^2 - 2(1 + t_1 t_2)\}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{d}[r_2 + r_1 - 2\sqrt{\{s(s-c)\}}]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{d}[2s - c - 2\sqrt{\{s(s-c)\}}]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d}}\{\sqrt{s} - \sqrt{(s-c)}\}.$$

Inoltre
$$1 + t_1^2 + 1 + t_2^2 + 1 + t_1 t_2 = \frac{1}{d}[r_1 + r_2 + \sqrt{\{s(s-c)\}}]$$

$$= \frac{1}{d}[2s - c + \sqrt{\{s(s-c)\}}].$$

Quindi
$$nT = \frac{1}{3d^{\frac{3}{2}}}\{\sqrt{s} - \sqrt{(s-c)}\}\{s + \sqrt{s}\sqrt{(s-c)} + (s-c)\}$$

$$= \frac{1}{3d^{\frac{3}{2}}}\left\{s^{\frac{3}{2}} - (s-c)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Ma $$n=\sqrt{\frac{\mu}{2d^3}},\ \text{per l'Art. 157.}$$

Sostituendo questo, ed i valori di s, $(s-c)$, abbiamo

$$T=\frac{1}{6\sqrt{\mu}}\left\{(r_1+r_2+c)^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_2-c)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

In questa ricerca abbiamo supposto che l'arco non includa il perielio; se fosse così dovremmo prendere la *somma* dei radicali per il valore di T.

161. Si può mostrare in simil modo che il tempo per descrivere intorno al fuoco un arco di un'ellisse o di un'iperbole, di cui sono dati i raggi vettori estremi e la corda, si può esprimere in termini di queste quantità e dell'asse maggiore solamente. Per la dimostrazione dobbiamo rimandare alla *Mécanique Céleste*, o al *Système du Monde* di Pontécoulant.

Si può anche mostrare, quasi nella stessa maniera, che il rapporto dell'area descritta in un dato tempo, a quella del triangolo formato dalla corda e dai raggi vettori estremi, si può esprimere indipendentemente dal parametro della traiettoria.

ESEMPII.

1. Se la distanza perielia dell'orbita di una cometa è $\frac{1}{3}$ del raggio dell'orbita della Terra supposta circolare, trovare il numero dei giorni che la cometa rimarrà dentro l'orbita della Terra.

2. Se una cometa descrive 90° dal perielio in 100 giorni, paragonare la sua distanza perielia con la distanza di un pianeta che descrive la sua orbita circolare in 942 giorni.

3. Mostrare come dividere l'orbita ellittica di un pianeta con un diametro, in modo che i tempi per descrivere le due parti siano come $n:1$, e trovare in quali casi solamente una tale linea si può tirare.

4. Nel caso dei pianeti e delle comete dimostrare le formole seguenti, le lettere essendo le stesse come nel testo,

$$r\frac{d\theta}{du}=a\sqrt{(1-e^2)};$$

$$\frac{r}{a}\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e}(u - nt);$$

$$\log\frac{r}{a} = -\log(1+\lambda^2)$$
$$-2\left(\lambda\cos u + \frac{1}{2}\lambda^2\cos 2u + \frac{1}{3}\lambda^3\cos 3u + \text{etc.}\right)$$

5. Un corpo descrive un'ellisse: dimostrare che i tempi per descrivere le due parti, nelle quali l'orbita è divisa dall'asse minore, stanno tra loro come $\pi+2e$ sta a $\pi-2e$, in cui e è l'eccentricità dell'ellisse.

6. Se Pp, Qq sono corde parallele all'asse maggiore di un'orbita ellittica, mostrare che la differenza dei tempi per gli archi PQ, pq varia come la distanza tra le corde.

7. Se una cometa di cui l'orbita è inclinata al piano dell'eclittica fosse osservata passare sul disco del Sole, e tre mesi dopo colpire il pianeta Marte, determinare la sua distanza dalla Terra alla prima osservazione, la Terra e Marte descrivendo intorno al Sole circoli nello stesso piano i di cui raggi stanno come 2:3.

8. Mostrare che il medio aritmetico delle distanze di un pianeta dal Sole, ad intervalli eguali infinitamente piccoli di tempo, è

$$a\left(1+\frac{e^2}{2}\right).$$

9. Quando un corpo descrive un'ellisse sotto l'azione di una forza nel fuoco S, se H è l'altro fuoco, il quadrato della velocità in P varia come $\frac{HP}{SP}$.

10. Il tempo per un arco di un'orbita parabolica limitata da una corda focale è come $(\text{corda})^{\frac{3}{2}}$.

11. Se si descrive un circolo che passa per il fuoco ed il vertice di un'orbita parabolica, ed anche per la posizione dell'elemento mobile ad ogni istante, mostrare che il suo centro descrive con velocità uniforme una linea retta che biseca ad angoli retti la distanza perielia.

12. Mostrare che la velocità di una cometa perpendicolare all'asse maggiore varia inversamente come il suo raggio vettore.

13. D_1, D_2 essendo due distanze di una cometa, in parti opposte del perielio, che racchiudono un angolo conosciuto, mo-

strare che la posizione del perielio si può trovare dall'equazione

$$\frac{\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}}{\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}}=\tan\frac{1}{4}\,(\text{somma delle anomalie vere})\cdot\tan\frac{1}{4}\,(\text{differ.}).$$

14. In qual punto di tutte le sezioni coniche è la velocità paracentrica un massimo? Mostrare che in un tal caso la velocità sta a quella in un circolo alla stessa distanza come la distanza sta alla perpendicolare sulla tangente.

15. In un'orbita ellittica trovare la relazione tra la velocità media angolare intorno al centro di forza, e la velocità angolare intorno all'altro fuoco, e quindi mostrare che quando e è piccola la seconda è presso a poco uniforme.

16. Se α e β sono la massima e la minima velocità angolare in un'ellisse intorno al fuoco, la velocità angolare *media* è

$$\frac{2\sqrt[4]{(\alpha^3\beta^3)}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}.$$

17. Trovare il massimo valore di $\theta-nt$ in un'orbita ellittica, e svilupparlo secondo le potenze di e, mostrando che esso non può contenere potenze pari.

Se Θ è questa quantità,

$$\Theta=2e+\frac{11\,e^3}{3\cdot2^4}+\frac{599\,e^5}{5\cdot2^{10}}+\text{etc.}$$

CAPITOLO VII.

Moto non libero.

162. Passiamo ora al caso del moto di un elemento assoggettato all'azione non solamente di date forze, ma di pressioni o tensioni non determinate. Tali casi si hanno quando l'elemento è legato ad un punto fisso, o mobile, per mezzo di una verga o di una fune, e quando esso è costretto a muoversi sopra una curva o una superficie.

Nell'applicare ad un problema di questa specie le equazioni generali del movimento di un elemento libero, dobbiamo assumere delle direzioni e delle intensità per le forze ignote, trattandole poi come conosciute, e si troverà sempre che le circostanze geometriche del movimento forniscono il numero richiesto di equazioni addizionali per la determinazione di tutte le quantità ignote in termini del tempo.

Un caso di questa specie è stato già trattato (Art. 78), cioè, quello di un elemento che si muove su di un piano inclinato sotto l'azione della gravità. Qui la forza indeterminata è la pressione sul piano, la quale però è evidentemente costante, ed eguale alla parte risoluta del peso dell'elemento perpendicolarmente al piano.

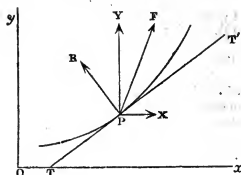
163. Il caso più semplice è

Un elemento è costretto a muoversi sopra una data curva piana levigata, sotto l'azione di date forze nel piano della curva, determinare il movimento.

Prendendo gli assi rettangolari in questo piano, le forze si possono risolvere in due, X, Y, parallele rispettivamente agli assi delle x e delle y. In aggiunta vi sarà la forza R, la pressione scambievole tra la curva e l'elemento, la quale evidentemente agisce secondo la normale della curva.

Sia P la posizione dell'elemento al tempo t; e le forze X, Y, R agiscano come nella figura. Si tiri PT, tangente alla curva resistente in P. Allora se $PTx=\theta$, abbiamo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\theta = \frac{dx}{ds}.$$

La massa dell'elemento essendo, come precedentemente, presa

per unità, le equazioni del moto sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - R \operatorname{sen} \theta = X - R\frac{dy}{ds} \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + R \cos \theta = Y + R\frac{dx}{ds} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Queste due equazioni, insieme con l'equazione della curva data, sono sufficienti per determinare completamente il moto.

Per eliminare R, si moltiplichi (1) per $\frac{dx}{dt}$, (2) per $\frac{dy}{dt}$, e si sommi. Otteniamo così,

$$\left(\text{poichè } \frac{dy}{ds}\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} \ldots\ldots (3),$$

o, come si può scrivere,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds},$$

la quale si potrebbe ottenere immediatamente esprimendo l'accelerazione secondo la tangente.

Ora, si è mostrato nel Cap. II. che se le forze risolute in X ed Y sono come quelle che s'incontrano in natura,

$$Xdx + Ydy$$

è il differenziale completo di una funzione $\varphi(x, y)$. Si vegga l'Art. 72.

Integrando (3) in questa ipotesi, abbiamo

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=\frac{v^2}{2}=\varphi(x,y)+C \;\ldots\ldots\; (4),$$

supponendo che v rappresenti l'intera velocità dell'elemento al tempo t.

Immaginiamo che l'elemento parta al tempo $t=0$, da un punto di cui le coordinate sono a, b, con una velocità V.

Abbiamo, da (4),

$$\frac{1}{2}V^2=\varphi(a,b)+C;$$

e quindi

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}V^2+\varphi(x,y)-\varphi(a,b) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5).$$

Questo mostra che un elemento, costretto a muoversi sotto l'azione delle forze X, Y, secondo una linea qualunque dal punto a, b al punto x, y, ha nell'arrivare all'ultimo punto, il quadrato della sua velocità accresciuto di una quantità interamente indipendente dalla linea percorsa: un altro semplice caso della conservazione dell'energia.

164. *Trovare la pressione sulla curva resistente.*

Si moltiplichi l'equazione (1) per $\frac{dy}{dt}$, (2) per $\frac{dx}{dt}$, e si sottragga. Allora, osservando che

$$\frac{dy}{ds}\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{ds}\frac{dx}{dt}=\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\frac{ds}{dt}}=\frac{ds}{dt},$$

abbiamo

$$\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=X\frac{dy}{dt}-Y\frac{dx}{dt}-R\frac{ds}{dt}.$$

Ma se ρ è il raggio di curvatura della curva resistente nel punto x, y,

$$\rho=\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

Trasformando per mezzo di questa, l'equazione precedente diviene

$$-\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds} - R;$$

o,

$$R = X \operatorname{sen} \theta - Y \cos \theta + \frac{v^2}{\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Le due parti di cui si compone questa espressione sono, evidentemente, la pressione risoluta sulla curva prodotta dalle forze X ed Y, e la pressione dovuta solamente alla velocità.

165. *Trovare il punto in cui l'elemento lascerà la curva resistente.*

Per questo è evidente che dobbiamo solamente porre $R=0$, poichè allora il movimento sarà libero.

Questa condizione ci dà

$$\frac{v^2}{\rho} = Y \cos \theta - X \operatorname{sen} \theta.$$

Ora sia F la risultante di X ed Y, allora se Q è la corda di curvatura in P parallela ad F, Q è evidentemente

$$= 2\rho \operatorname{sen} FPT' = 2\rho \cdot \operatorname{sen} (FPX - \theta).$$

$$= 2\rho \frac{Y \cos \theta - X \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}.$$

Quindi, $$\frac{v^2}{2} = \frac{Q}{4} \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$

$$= F\frac{Q}{4}.$$

Paragonando questa con la formola $\frac{1}{2} v^2 = fs$ (Art. 76), vediamo che *l'elemento lascerà la curva ad un punto in cui la sua velocità è quella che sarebbe prodotta dalla forza risultante che allora agisce su di esso, se si mantenesse costante durante la sua caduta dalla quiete per uno spazio eguale ad $\frac{1}{4}$ della corda di curvatura parallela a quella risultante.*

166. Le formole date si semplificano molto se consideriamo la gravità come la sola forza agente. Prendendo in questo caso

l' asse delle y verticalmente *in su*, le nostre forze diventano

$$X = 0 \quad \text{ed} \quad Y = -g;$$

e la velocità, e la pressione sulla curva, sono date da

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}V^2 = g(k - y),$$

se $v = V$ quando $y = k$;

ed
$$R = g\cos\theta + \frac{v^2}{\rho}.$$

Supponiamo che si porti l'origine al punto dal quale si suppone che il moto dell'elemento incominci; e si prenda l'asse delle y verticalmente *in giù;* avremo evidentemente

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}V^2 = gy;$$

e se l'elemento parte dalla quiete

$$\frac{1}{2}v^2 = gy.$$

Questo mostra che la velocità dipende semplicemente dalla distanza al di sotto del piano orizzontale condotto per la posizione primitiva di quiete. Quindi, qualunque sia la natura della curva sulla quale un elemento scende sotto l'azione della gravità, il suo moto sarà sempre nella stessa direzione sino a che esso salga allo stesso livello di quello della caduta a cui è dovuta la sua velocità. Se esso non può fare così, il suo moto sarà costantemente nella stessa direzione; se lo può, la sua velocità diverrà zero, e l'elemento *poi* o resterà permanentemente in riposo, o ritornerà al punto dal quale partì.

167. *Trovare il tempo della discesa di un elemento per un arco qualunque di una curva, partendo dalla quiete nell'estremità superiore dell'arco.*

Prendendo l'estremità superiore per origine e l'asse delle y verticalmente in giù; abbiamo

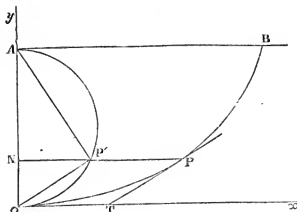
$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{(2gy)};$$

e
$$t_1 = \int_0^{y_1} \frac{\frac{ds}{dy}dy}{\sqrt{(2gy)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

se y_1 è la coordinata verticale dell' estremità inferiore dell' arco dato.

Ovvero, prendendo il punto più basso per origine, e l' asse delle y in su, abbiamo, poichè in questo caso v tende a diminuire s,

$$t_1 = \int_{y_1}^{0} \frac{-\frac{ds}{dy}dy}{\sqrt{\{2g(y_1 - y)\}}} = \int_{0}^{y_1} \frac{\frac{ds}{dy}dy}{\sqrt{\{2g(y_1 - y)\}}} \; .. \; (2).$$

168. Es. *Trovare il tempo per discendere dalla quiete in un punto qualunque di una cicloide invertita sino al vertice.*

Prendendo la formola (2); poichè in questo caso il vertice è l' origine, e l' asse è l' asse delle y, abbiamo dalla figura

$$s = OP = 2 \text{ corda } OP' = 2\sqrt{(AO \cdot ON)} = 2\sqrt{(2ay)},$$

se a è il raggio del circolo generatore.

Quindi, $$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2a}{y}};$$

e $$t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(yy_1 - y^2)}},$$

$$= \left(C + \sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{vers}^{-1} \frac{2y}{y_1}\right)_0^{y_1},$$

$$= \pi\sqrt{\frac{a}{g}};$$

che è indipendente da y_1, cioè, dal punto dal quale l'elemento incomincia la sua discesa.

La ragione di questa rimarchevole proprietà si vedrà più facilmente se prendiamo la formola per l'accelerazione nella direzione dell'arco. Abbiamo così

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \operatorname{sen}(P'Ox)$$

(poichè OP' è parallela alla tangente della cicloide in P)

$$= -g \operatorname{sen}(OAP')$$

$$= -g \frac{OP'}{OA}$$

$$= -g \frac{s}{4a},$$

o sia l'accelerazione è proporzionale alla distanza dal vertice misurata lungo la cicloide. Quando paragoniamo ciò con gli Art. 81–83, la ragione del risultato precedente si renderà evidente.

169. *Un elemento sollecitato dalla gravità si muove in un arco di un circolo verticale, determinare il movimento.*

Prendendo il diametro verticale per asse delle y, e la sua estremità inferiore per origine, l'equazione del circolo è

$$x = \sqrt{(2ay - y^2)}.$$

Quindi
$$\frac{ds}{dy} = \frac{a}{\sqrt{(2ay - y^2)}}.$$

Ma
$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{\{2g(y_1 - y)\}},$$

se supponiamo che il movimento incominci dal punto definito da y_1; e quindi

$$\frac{dt}{dy} = -\frac{a}{\sqrt{(2g)}} \frac{1}{\sqrt{\{(y_1 - y)(2ay - y^2)\}}} \;\ldots\ldots\; (1).$$

Se poniamo $y = y_1 \operatorname{sen}^2\theta$, abbiamo per il tempo della caduta per un arco qualunque

$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{y_1}{2a} \operatorname{sen}^2\theta\right)}},$$

un integrale ellittico del primo ordine, di cui il valore per dati

limiti può aversi solamente per approssimazione; eccetto quando $y_1 = 2a$, cioè, quando la velocità è quella dovuta ad una caduta dal punto più alto del circolo. Questo caso lo considereremo fra poco (Art. 171).

(1) si può porre nella forma

$$\frac{dt}{dy} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{1}{\sqrt{(y_1 y - y^2)}}\left(1-\frac{y}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{1}{(y_1 y - y^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2a}\right)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{y}{2a}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{y}{2a}\right)^3+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left(\frac{y}{2a}\right)^n+\text{etc.}\right\},$$

ciascun termine della quale si può integrare separatamente.

Supponiamo che si voglia determinare il tempo della discesa sino al punto più basso; i limiti di y sono y_1 e 0. Se osserviamo che

$$\int\frac{y^n dy}{\sqrt{(y_1 y - y^2)}} = \frac{2n-1}{2n}y_1\int\frac{y^{n-1}dy}{\sqrt{(y_1 y - y^2)}} - \frac{y^{n-1}\sqrt{(y_1 y - y^2)}}{n}.$$

onde $$\int_{y_1}^{0}\frac{y^n dy}{\sqrt{(y_1 y - y^2)}} = \frac{2n-1}{2n}y_1\int_{y_1}^{0}\frac{y^{n-1}dy}{\sqrt{(y_1 y - y^2)}};$$

mentre $$\int_{y_1}^{0}\frac{dy}{\sqrt{(y_1 y - y^2)}} = \left(\text{vers}^{-1}\frac{2y}{y_1}+C\right)_{y_1}^{0} = -\pi;$$

abbiamo $$\int_{y_1}^{0}\frac{y^n dy}{\sqrt{(y_1 y - y^2)}} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\pi y_1^n.$$

Quindi il tempo della caduta sino al punto più basso è

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{y_1}{2a}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{y_1}{2a}\right)^2+\ldots\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right\}^2\left(\frac{y_1}{2a}\right)^n+\ldots\right].$$

Quando l'arco della vibrazione è molto piccolo, abbiamo

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

ed il tempo di una completa oscillazione è

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Il valore di t_1 coincide con quello in una cicloide, Art. 168, se osserviamo che nella cicloide la quantità a è quattro volte più grande che nel circolo.

170. L'approssimazione seguente dà, come una correzione al periodo di un quarto di oscillazione, l'espressione

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{y_1}{8a},$$

di cui il rapporto a quel periodo è

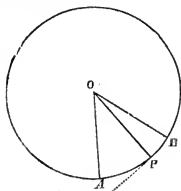
$$\frac{y_1}{8a}=\left(\frac{1}{4}\text{ corda del semi-angolo d'oscillazione}\right)^2.$$

Così, se l'elemento oscilla per un arco la di cui corda è $\frac{1}{10}$, da ciascuna parte della verticale, il tempo dell'oscillazione dato dalla formola $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ sarà inesatto per circa $\frac{1}{1600}$ del suo valore, in difetto.

Quando l'elemento si suppone sospeso da un filo senza peso, esso diviene ciò che si chiama un *pendolo semplice*. Una tale macchina può esistere solamente in teoria, ma la Dinamica ci fornisce i mezzi di ridurre il calcolo del movimento di un pendolo come quello che possiamo costruire a quello del pendolo semplice. È chiaro che col suo mezzo possiamo determinare il valore di g, se la lunghezza del pendolo, il suo arco d'oscillazione, ed il numero delle vibrazioni che esso fa in un dato tempo, sono conosciuti. Poichè la gravità decresce (secondo una nota legge) a misura che ci eleviamo al di sopra della superficie della Terra, il paragone dei tempi della vibrazione dello stesso pendolo alla sommità di una montagna ed alla sua base ne darebbe approssimativamente l'altezza. Una delle più importanti applicazioni del pendolo è quella fatta da Newton. È chiaro che se il peso di un corpo non è proporzionale alla sua massa, il valore di g sarà diverso per diversi materiali. Quindi il fatto che pendoli della stessa lunghezza vibrano in tempi eguali nello stesso luogo qualunque sia la materia da cui sono formati, dimostra, per mezzo della formola precedente, la verità di una parte della Legge di Gravitazione, Art. 144: cioè che, in circostanze eguali, l'attrazione

esercitata da un corpo sopra di un altro è proporzionale alla quantità di materia che essa contiene, ed indipendente dalla sua qualità.

171. O pure possiamo prendere l'equazione dell'accelerazione lungo l'arco.

Supponiamo che O sia il centro, OA il raggio verticale, B il punto dal quale parte l'elemento con la velocità $a\omega$, al tempo $t=0$; P la sua posizione al tempo t.

Sia $AOB=\alpha,\ AOP=\theta,\ OA=a.$

Allora $$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\ \text{sen}\,\theta.$$

Ma $$s=a\theta.$$

Quindi $$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{a}\ \text{sen}\,\theta \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Moltiplicando per $2\dfrac{d\theta}{dt}$ ed integrando, abbiamo

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=C+\frac{2g}{a}\cos\theta.$$

Ma $$\frac{d\theta}{dt}=\omega,\ \text{quando}\ \theta=\alpha,$$

quindi $$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{a}}\sqrt{\left(\cos\theta-\cos\alpha+\frac{a\omega^2}{2g}\right)} \quad\ldots\ldots\ldots (2).$$

Questa non si può integrare senza le funzioni ellittiche a meno che non sia

$$\frac{a\omega^2}{2g}-\cos\alpha=1;$$

o $$a^2\omega^2 = 2ga\,(1 + \cos\alpha);$$

cioè a meno che la velocità di proiezione in B, non sia quella dovuta ad una caduta per la differenza delle altezze di B e del punto più alto del circolo.

In questo caso,

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Da questa abbiamo

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\,t = \log\left(C\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}}\right).$$

Ma $t=0$, $\theta=\alpha$, insieme,

quindi $$\sqrt{\frac{g}{a}}\,t = \log\sqrt{\frac{\left(1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)}} \quad\ldots\ldots\ (3),$$

la quale determina il moto completamente.

Dall' osservazione nell' Art. 166, è evidente che, dopo di esser giunto in A, l'elemento salirà per l'altro semicircolo con una velocità sufficiente appunto per portarlo al punto più alto; il tempo, T, nel quale esso giungerà a quel punto dopo di aver lasciato A, si troverà ponendo

$$\theta = \pi, \quad \alpha = 0, \quad \text{in (3)}.$$

Questo dà $$\sqrt{\frac{g}{a}}\,T = \log\infty = \infty;$$

o sia, l'elemento si avvicinerà continuamente al punto più alto senza raggiungerlo mai.

172. *Trovare la pressione sul circolo.*

Si supponga R diretta in fuori dal centro, allora evidentemente

$$\begin{aligned} R &= \frac{v^2}{a} + g\cos\theta \\ &= 2g(\cos\theta - \cos\alpha) + a\omega^2 + g\cos\theta, \text{ per (2)}, \\ &= 3g\cos\theta - 2g\cos\alpha + a\omega^2. \end{aligned}$$

Supponiamo che l'elemento sia stato proiettato da A, con la velocità $a\omega$; allora $\alpha=0$;

ed $$R = 3g\cos\theta - 2g + a\omega^2.$$

Questa espressione di R ammette il valore zero se

$$a\omega^2 \leqq 5g, \quad \text{o} \quad a\omega \leqq \sqrt{(5ga)}.$$

Può accadere però che i punti così trovati non giacciano dentro l'arco percorso dall'elemento.

Vi sono posizioni di quiete (Art. 166) quando $a\omega \leqq 2\sqrt{(ga)}$. Ora, affinchè i punti in cui $R=0$ giacciano nei limiti dell'oscillazione, il valore di $\cos\theta$, per i primi, non deve essere minore di quello per i secondi;

o, $$\frac{2g - a\omega^2}{3g} \geqq \frac{2g - a\omega^2}{2g}.$$

Questa condizione può essere solamente soddisfatta da $2g-a\omega^2$ che svanisce o diviene negativa; cioè, da

$$a\omega \geqq \sqrt{(2ga)}.$$

Quindi, se la velocità di proiezione dal punto più basso non è minore di $\sqrt{(2ga)}$, e non è maggiore di $\sqrt{(5ga)}$, vi sarà un punto nella traiettoria in cui $R=0$; e se l'elemento si muove sulla parte concava di un circolo levigato, o è legato con un filo ad un punto fisso, il moto circolare cesserà in quel punto; l'elemento cadrà dal circolo nel primo caso, ed il filo cesserà di essere teso nel secondo.

Fuori di questi limiti è evidente che avremo, per velocità di proiezione $>\sqrt{(5ga)}$ rivoluzione continua nel circolo, e per velocità di proiezione $<\sqrt{(2ga)}$ oscillazioni intorno al punto più basso.

Ancora per quello che abbiamo mostrato sopra, se l'elemento si muove in un tubo circolare, esso oscillerà se la velocità nel punto più basso è minore di $2\sqrt{(ga)}$: se quella velocità è eguale a $2\sqrt{(ga)}$ l'elemento giungerà al punto più alto dopo un tempo infinito; e se è maggiore di $2\sqrt{(ga)}$ esso girerà continuamente.

173. *Un elemento scende dalla quiete ad un'altezza* k *per la parabola semicubica di cui l'equazione è* $ax^2=y^3$, *l'asse delle* y *essendo verticale; determinare il movimento.*

Qui, $\frac{ds}{dt} = -\sqrt{\{2g(k-y)\}}$, poichè la gravità tende a diminuire s.

Inoltre $\frac{ds}{dy} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left(1 + \frac{9y^4}{4a^2x^2}\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)}$.

Quindi, $$\frac{dt}{dy} = -\sqrt{\frac{4a+9y}{8ga(k-y)}};$$

ed il tempo della caduta ad un punto in cui $y = l$ è

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{(8ga)}} \int_l^k \sqrt{\frac{4a+9y}{k-y}}\, dy.$$

Sia $\frac{\theta^2}{9} = \frac{k-y}{4a+9y}$, i limiti di θ sono $\sqrt{\frac{9(k-l)}{4a+9l}}$ e 0;

e quindi $$t_1 = \frac{9k+4a}{3\sqrt{(8ga)}} \int_0^{\sqrt{\frac{9(k-l)}{4a+9l}}} \frac{2d\theta}{(1+\theta^2)^2}.$$

Si ponga $\theta = \tan\varphi$, i limiti sono $\tan^{-1}\sqrt{\frac{9(k-l)}{4a+9l}}$ e 0, e

$$t_1 = \frac{9k+4a}{3\sqrt{(8ga)}} \int_0^{\tan^{-1}\sqrt{\frac{9(k-l)}{4a+9l}}} 2\,d\varphi \cos^2\varphi$$

$$= \frac{9k+4a}{3\sqrt{(8ga)}} \left\{ \tan^{-1}\sqrt{\frac{9(k-l)}{4a+9l}} + \frac{\sqrt{\frac{9(k-l)}{4a+9l}}}{1+\frac{9(k-l)}{4a+9l}} \right\};$$

che determina t_1 per ogni valore di k e di l.

Se si vuole il tempo della caduta alla cuspide nell'origine, $l = 0$, e

$$T = \frac{9k+4a}{3\sqrt{(8ga)}} \left\{ \tan^{-1}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{k}{a}} + \frac{6\sqrt{(ak)}}{4a+9k} \right\}.$$

174. *Un elemento sollecitato dalla gravità è proiettato, dal vertice, lungo una parabola levigata il di cui asse è verticale ed il vertice in su; determinare il movimento e la pressione sulla curva.*

Sia $x^2=4ay$ l'equazione, l'asse delle y essendo verticalmente in giù, ed il vertice nell'origine. Allora

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = V^2 + 2gy,$$

in cui V è la data velocità al vertice. Supponiamola dovuta all'altezza l, allora

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(l+y) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ora
$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{y}{a+y},$$

per l'equazione della curva.

Quindi
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2gy(l+y)}{a+y},$$

e, se t_1 è il tempo della caduta alla profondità k,

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{(2g)}}\int_0^k \sqrt{\frac{a+y}{y(l+y)}}\,dy,$$

il quale è così determinato.

Per la pressione sulla curva, supponendola positiva quando è *dall'* asse, abbiamo immediatamente

$$\begin{aligned} R &= \frac{v^2}{\rho} - g\frac{dx}{ds} \\ &= \frac{2g(l+y)}{2a\left(\frac{a+y}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} - g\left(\frac{a}{a+y}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= g\frac{(l-a)a^{\frac{1}{2}}}{(a+y)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Se $l>a$, R è positiva, e l'elemento si muoverà dalla parte concava della curva; se $l<a$, R è negativa, e l'elemento si muove dalla parte convessa. In ciascuno di questi casi la pressione è inversamente come la $\frac{3^{ma}}{2}$ potenza della profondità al di sotto della direttrice.

Se $l=a$, cioè se la velocità di proiezione al vertice è quella dovuta ad una caduta dalla direttrice, R è zero per tutto il cammino, o sia l'elemento si muove liberamente, come si poteva dedurre dai risultati del Cap. IV.

175. *Trovare una curva tale che un elemento sotto l'azione della gravità discenderà per un arco qualunque di essa da un dato punto, nello stesso tempo che impiegherebbe per discendere per la corda di quell'arco.*

Si prenda la verticale condotta pel punto dato come linea iniziale, allora se ρ, θ sono le coordinate polari di un punto della curva, il punto dato essendo il polo, le condizioni del problema danno immediatamente

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{ds}{d\theta}\,d\theta}{\sqrt{(2g\rho\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{2\rho}{g\cos\theta}},$$

θ_0 essendo l'inclinazione alla verticale della tangente al punto di partenza.

Ma, differenziando rispetto a θ,

$$\frac{\frac{ds}{d\theta}}{\sqrt{(2\rho\cos\theta)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\frac{\frac{d\rho}{d\theta}}{\sqrt{(\rho\cos\theta)}} + \frac{\sqrt{\rho}\cdot\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Quindi $$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} + \rho\tan\theta.$$

Ma sempre $$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2.$$

Eliminando s tra queste equazioni, e riducendo, otteniamo

$$2\frac{d\rho}{\rho} = 2\frac{\cos 2\theta\, d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta},$$

di cui l'integrale è

$$2\log\rho = \log C\operatorname{sen}2\theta,$$

cioè, $$\rho^2 = a^2\operatorname{sen}2\theta,$$

la Lemniscata di Bernoulli, il nodo essendo il polo, ed una delle tangenti in quel punto la linea iniziale. Quindi $\theta_0 = 0$.

176. *Trovare una curva tale che se un elemento, sollecitato dalla gravità, scende su di essa per uno spazio verticale* h, *partendo dal vertice con la velocità dovuta ad un'altezza* h, *il tempo della caduta sia indipendente da* h.

Sia l'asse delle y verticalmente in giù, allora evidentemente il tempo richiesto è

$$t_1 = \int_0^h \frac{\frac{ds}{dy}\,dy}{\sqrt{\{2g(h+y)\}}}.$$

Sia $\frac{ds}{dy} = \varphi(y)$ la richiesta equazione differenziale della curva,

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{(2g)}} \int_0^h \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{(h+y)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2g)}} \int_0^1 \frac{\varphi(hz) h^{\frac{1}{2}}\,dz}{\sqrt{(1+z)}}, \text{ se } y = hz.$$

Ora $\frac{dt_1}{dh}$ deve essere identicamente zero, quindi abbiamo

$$hz\,\varphi'(hz) = -\frac{1}{2}\varphi(hz),$$

o

$$\frac{\varphi'(y)\,dy}{\varphi(y)} = -\frac{dy}{2y},$$

quindi

$$\varphi(y) = Cy^{-\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dy},$$

il che mostra che la curva è una cicloide, di cui la base è orizzontale ed il vertice in su.

177. *Essendo dati due punti, che non sono nè in una linea verticale nè in una orizzontale, trovare la curva che li congiunge, per la quale scendendo un elemento sotto l'azione della gravità e partendo dalla quiete nel più alto, pervenga all'altro punto nel più breve tempo possibile.*

La curva deve evidentemente giacere nel piano verticale che passa per i punti. Infatti supponiamo che essa non giaccia in quel piano, si proietti ortogonalmente sul piano, e si chiamino gli elementi corrispondenti della curva e della sua proiezione σ e σ'. Allora se un elemento scende per la proiezione della curva la sua velocità in σ' sarà la stessa che la velocità nell'altra in σ.

Ma σ non è *mai minore* di σ', ed è generalmente maggiore. Quindi il tempo per σ' è generalmente minore di quello per σ, e *mai maggiore*. Cioè, l'intero tempo della discesa per la proiezione della curva è minore di quello per la curva stessa. O sia la curva richiesta giace nel piano verticale che passa per i punti.

Prendendo gli assi delle x ed y, orizzontale, e verticalmente in giù, rispettivamente, dal punto di partenza; se x_0 è l'ascissa dell'altro punto, il tempo della discesa sarà

$$t_0 = \int_0^{x_0} \frac{\frac{ds}{dx}\,dx}{\sqrt{(2gy)}}; \text{ o, scrivendo } \frac{dy}{dx} = p,$$

$$t_0 = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(2gy)}}\,dx.$$

Applicando le regole del Calcolo delle Variazioni, abbiamo, poichè V o $\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}}$ è una funzione di y e p, la condizione per un minimo,

$$V = p\left(\frac{dV}{dp}\right) + C,$$

il coefficiente differenziale essendo parziale.

Questo dà $$\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}} = \frac{p^2}{\sqrt{y}\sqrt{(1+p^2)}} + C,$$

o $$\sqrt{y}\sqrt{(1+p^2)} = \frac{1}{C} = \sqrt{a} \quad \text{supponiamo.}$$

Quindi $$\frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p} = \sqrt{\frac{a}{a-y}},$$

equazione differenziale di una cicloide, l'origine essendo una cuspide e la base l'asse delle x.

Questo è un problema celebre nell'istoria della Dinamica. La cicloide ha ricevuto per questa proprietà il nome di Brachistocrona. Più innanzi ci proponiamo d'investigare la natura ed alcune delle proprietà delle Brachistocrone per altre forze oltre della gravità.

178. *Trovare la curva per la quale se un elemento, proiettato con una data velocità, scende sotto l'azione della gravità, percorrerà spazii verticali eguali in tempi eguali.*

Qui abbiamo, prendendo l'asse delle x orizzontale, e quello delle y verticalmente in giù,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(2gy)}\,;$$

se la velocità è quella dovuta ad una caduta dall'asse delle x.

Inoltre per la condizione $\frac{dy}{dt} = \text{cost.} = \sqrt{(2gh)}$, supponiamo.

Quindi
$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{y}{h}}\,,$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y-h}{h}}\,;$$

o,
$$x + C = \frac{2}{3}\left\{\frac{(y-h)^3}{h}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

la parabola semicubica.

Se la velocità orizzontale deve essere costante, abbiamo

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{(2gk)}\,;\ \text{onde}\ \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{y}{k}}\,,\ \text{o}\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y-k}{k}}\,,$$

e quindi
$$2\sqrt{k}\,\sqrt{(y-k)} = x + C\,;$$

una parabola con l'asse verticale ed il vertice in su; come invero potevamo prevedere dai risultati del Cap. IV.

Si deve osservare che questa non è la sola soluzione del problema proposto, poichè le equazioni precedenti sono tutte soddisfatte dalla soluzione particolare

$$y = k.$$

Questa dinota una linea orizzontale, in cui la pressione è uniforme, ed eguale al peso dell'elemento. Nel caso della parabola il moto è libero.

179. *Un elemento si muove su di una curva piana levigata sotto l'azione di una forza diretta ad un centro fisso nel piano della curva; determinare il moto.*

Sia $r = f(\theta)$ l'equazione polare della curva resistente rispetto al centro di forza come polo, e sia $P = \varphi(r)$ la forza centrale *ripulsiva* sopra un elemento di cui la distanza dal centro è r.

Risolvendo secondo la tangente in un punto qualunque,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = P\frac{dr}{ds} \text{ .... } (1);$$

Quindi $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = C + 2\int \varphi(r)\,dr \text{ .... } (2).$$

L'equazione (2) contiene la completa soluzione del problema per quanto concerne il movimento; poichè, per mezzo dell'equazione della curva, r o s si può eliminare da essa, e se l'equazione differenziale risultante è integrabile, essa darà s o r in termini di t.

Per la pressione sulla curva. Risolvendo secondo la normale in un punto qualunque, ρ essendo il raggio di curvatura, abbiamo

$$\frac{v^2}{\rho} + P\frac{rd\theta}{ds} = R \text{ .... } (3),$$

un'espressione che per mezzo delle equazioni precedenti darà R in termini di t o r.

Quindi la soluzione è completa.

180. *Un elemento, inizialmente in quiete in un punto della spirale logaritmica* $r = ae^{n\theta}$ *di cui il raggio vettore è* b, *si muove sulla curva sotto l'azione di un centro attrattivo di forza proporzionale alla distanza, situato al polo; determinare il movimento.*

Qui $$\frac{d^2s}{dt^2} = -\mu r\frac{dr}{ds};$$

onde $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C - \mu r^2,$$

e $$0 = C - \mu b^2,$$

quindi $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\{\mu(b^2 - r^2)\}}$$

Ma $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{dr}{dt}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}.$$

Abbiamo quindi $\dfrac{dr}{\sqrt{(b^2 - r^2)}} = \dfrac{n\sqrt{\mu}}{\sqrt{(1 + n^2)}}\,dt$,

onde
$$r = b\cos\left\{\frac{n\sqrt{\mu t}}{\sqrt{(1+n^2)}}+\beta\right\}.$$

Al tempo $t=0$, questa diviene $b=b\cos\beta$; che dà $\beta=0$, e finalmente
$$r = b\cos\frac{n\sqrt{\mu t}}{\sqrt{(1+n^2)}};$$
che determina la posizione dell' elemento ad ogni tempo.

Quando esso giunge al polo $r=0$; il richiesto intervallo è quindi
$$T=\frac{\pi\sqrt{(1+n^2)}}{2n\sqrt{\mu}}.$$

Per la pressione sulla curva,
$$\begin{aligned}R &= \frac{v^2}{\rho}-\mu r\frac{rd\theta}{ds}\\ &= \frac{\mu(b^2-r^2)}{r\sqrt{(1+n^2)}}-\frac{\mu r}{\sqrt{(1+n^2)}}\\ &= \frac{\mu}{\sqrt{(1+n^2)}}\,\frac{b^2-2r^2}{r}.\end{aligned}$$

Quindi la pressione è verso il polo quando il movimento incomincia, diviene zero quando la distanza dell' elemento dal polo diminuisce nel rapporto di $\frac{1}{\sqrt{2}}$, e poi è diretta dal polo pel rimanente del moto.

181. *Un elemento si muove, sotto l' azione di nessuna forza applicata, nell' involuta di un circolo, determinare il movimento.*

Il modo più semplice di risolvere una tale questione si è di notare che la velocità è necessariamente costante. Se a è il raggio del circolo, $\theta+\alpha$ l'angolo al centro corrispondente alla lunghezza del filo svolto, abbiamo evidentemente
$$a(\alpha+\theta)\frac{d\theta}{dt}=C,$$
dalla quale il movimento è immediatamente determinato.

Se m è la massa dell'elemento, la pressione sulla curva (o la tensione del filo) è
$$T=\frac{mv^2}{\rho}=\frac{mC^2}{a(\alpha+\theta)}.$$

Riferite a coordinate rettangolari con l'origine nel centro del circolo, le equazioni del movimento (θ essendo misurato dall'asse delle y) sono

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\cos\theta,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -T\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

con le condizioni geometriche,

$$x = a\,\{(\alpha+\theta)\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta\},$$

$$y = a\,\{(\alpha+\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\}.$$

Dall'ultima abbiamo

$$\frac{dx}{dt} = -a\,(\alpha+\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = a\,(\alpha+\theta)\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d}{dt}\left[(\alpha+\theta)\frac{d\theta}{dt}\right] - a\cos\theta\,(\alpha+\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\cos\theta\,\frac{d}{dt}\left[(\alpha+\theta)\frac{d\theta}{dt}\right] - a\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\alpha+\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Usando queste nelle equazioni del moto, troviamo subito

$$a\frac{d}{dt}\left[(\alpha+\theta)\frac{d\theta}{dt}\right] = 0,$$

$$ma\,(\alpha+\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = T,$$

che sono equivalenti ai risultati ottenuti sopra.

182. *Quando la curva resistente è a doppia curvatura.*

Tutto ciò che conosciamo direttamente rispetto ad R si è che essa è perpendicolare alla retta tangente in ogni punto.

Si risolvino allora le forze date che agiscono sull'elemento in tre, una, S, secondo la tangente, la quale in tutt'i casi in natura sarà una funzione di x, y, z e quindi di s; un'altra, T, nella linea d'intersezione del piano normale col piano osculatore (o nel raggio di curvatura assoluta), e la terza, P, perpendicolare a ciascuna delle altre due.

Siano R_1, R_2 le parti risolute di R nelle direzioni di T e P. Allora l'accelerazione secondo la tangente è $\frac{d^2s}{dt^2}$, e perciò

$$\frac{d^2s}{dt^2} = S \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Questa equazione insieme con le due della curva è sufficiente per determinare completamente il *moto*.

Ora l'elemento in ogni punto della sua traiettoria si può considerare come movendosi nel piano osculatore. Quindi, per la nostra investigazione del movimento in una curva piana, Art. 155, se ρ è il raggio di curvatura assoluta, v la velocità,

$$R_1 = \frac{v^2}{\rho} - T \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

T essendo considerata positiva quando agisce verso il centro di curvatura assoluta.

Ora R_2 è la forza che impedisce a P di deviare l'elemento dal piano osculatore; e perciò

$$R_2 = -P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

(2) e (3) danno le parti risolute della pressione sulla curva.

Ancora $R = \sqrt{(R_1^2 + R_2^2)}$, e la sua direzione fa un angolo $= \tan^{-1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ col piano osculatore.

183. Nell'Art. 168 giungemmo alla rimarchevole proprietà della cicloide invertita, che un elemento scendendo sotto l'azione della gravità dalla quiete in un punto qualunque della curva giunge al punto più basso nello stesso tempo, qualunque sia il punto della curva dal quale esso parte. *Cerchiamo per quali forze un' analoga proprietà è posseduta da ogni altra curva data.*

Le forze risolute secondo la curva abbiano una componente $= -\varphi'(s)$, in cui s è la distanza dal punto al quale il tempo della caduta è costante: allora,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\varphi'(s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Se l'elemento parte ad una distanza k dal punto fisso, la velocità $= 0$ quando $s = k$. Quindi l'esatto integrale di (1) è

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\{\varphi(k) - \varphi(s)\};$$

ed abbiamo $$\sqrt{2}\,\tau = \int_k^0 \frac{-ds}{\{\varphi(k)-\varphi(s)\}^{\frac{1}{2}}};$$

se τ è il tempo della caduta al punto fisso, che per ipotesi deve essere indipendente da k.

Si ponga $s = kz$, i limiti di z sono 1 e 0, e

$$\sqrt{2}\,\tau = \int_0^1 \frac{k\,dz}{\{\varphi(k)-\varphi(kz)\}^{\frac{1}{2}}}:$$

ed, affinchè questo sia indipendente da k, dobbiamo evidentemente avere

$$\varphi(k)-\varphi(kz) = k^2 f(z);$$

in cui $f(z)$ è una funzione che non contiene k, e che in fatti riviene ad essere una costante.

Questa equazione si può porre nella forma

$$\frac{\varphi(k)}{k^2} - z^2\frac{\varphi(kz)}{k^2z^2} = f(z),$$

dalla quale, con l'inspezione, otteniamo

$$\frac{\varphi(k)}{k^2} = C' + \frac{C''}{k^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

O pure potremmo procedere come segue,

$$\sqrt{2}\,\frac{d\tau}{dk} = \int_0^1 \frac{\{\varphi(k)-\varphi(kz)\}^{\frac{1}{2}} - \dfrac{k}{2}\dfrac{\varphi'(k)-z\,\varphi'(kz)}{\{\varphi(k)-\varphi(kz)\}^{\frac{1}{2}}}}{\varphi(k)-\varphi(kz)}\,dz$$

e questa deve essere identicamente eguale a zero.

Quindi $$\left\{\varphi(k) - \frac{k}{2}\varphi'(k)\right\} - \left\{\varphi(kz) - \frac{kz}{2}\varphi'(kz)\right\} = 0$$

identicamente, il che può solamente accadere se

$$\varphi(x) - \frac{x}{2}\varphi'(x) = C'';$$

(o pure se $\varphi(x) =$ costante; che evidentemente è inutile considerare, poichè in questo caso non vi sarebbe alcuna accelerazione e quindi alcun movimento).

Quindi $$-2\,\frac{\varphi(x)}{x^3}+\frac{\varphi'(x)}{x^2}=-\frac{2\,C''}{x^3},$$

che dà, come sopra,

$$\frac{\varphi(x)}{x^2}=C'+\frac{C''}{x^2}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (2').$$

L'una o l'altra di queste equazioni (2) o (2') dà

$$\varphi(x)=C'x^2+C'',$$

e $$\varphi'(x)=Cx.$$

Quindi, per (1), $$\frac{d^2s}{dt^2}=-Cs\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (3),$$

cioè, la forza risoluta secondo la curva deve essere proporzionale alla distanza in arco dal punto fisso.

184. Potremmo arrivare alla stessa conclusione, ma non del tutto in modo tanto soddisfacente, così,

$$\sqrt{2}\tau=\int_0^k\frac{ds}{\{\varphi(k)\}^{\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\varphi(s)}{\varphi(k)}+\dots+\frac{\lfloor 2n}{2^{2n}(\lfloor n)^2}\left\{\frac{\varphi(s)}{\varphi(k)}\right\}^n+\dots\right].$$

Ora la condizione affinchè l'$(n+1)^{mo}$ termine quando s'integra tra i limiti non contenga k è che

$$\int_0^k\frac{\{\varphi(s)\}^n\,ds}{\{\varphi(k)\}^{n+\frac{1}{2}}}\ \text{sia indipendente da } k.$$

Questo può solamente accadere se è $\{\varphi(k)\}^{\frac{1}{2}}$, e naturalmente anche $\{\varphi(s)\}^{\frac{1}{2}}$, delle stesse dimensioni come ds, e quindi come s.

Si prenda quindi $\{\varphi(s)\}^{\frac{1}{2}}=C''s$,

o $$\varphi(s)=C's^2;$$

ed abbiamo $$\varphi'(s)=Cs, \text{ come sopra.}$$

185. Quindi se X, Y, Z sono le forze impresse,

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=-Cs$$

è la condizione che esse debbono soddisfare ad ogni punto x,y,z della curva data. Per tali forze la curva data si dice essere una *Tautocrona*.

Dall' equazione (3) Art. 183, il tempo della discesa è

$$\tau=\frac{\pi}{2\sqrt{C}}. \text{ Quindi } C=\frac{\pi^2}{4\tau^2}.$$

186. *Trovare la Brachistocrona per un elemento assoggettato all' azione di forze qualunque che rendono* $Xdx+Ydy+Zdz$ *un differenziale completo di tre variabili indipendenti.*

Generalmente $$t=\int\frac{ds}{v},$$

tra i limiti convenienti, deve essere un minimo; e quindi, prendendo la sua variazione,

$$\delta t=\int\frac{v\delta\, ds-ds\,\delta v}{v^2}=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ma l' equazione dell' energia è

$$\frac{1}{2}v^2=\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz);$$

e dà $$v\,\delta v=X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z,$$

o $$ds\,\delta v=(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z)\,dt \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Inoltre $$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

e $$\frac{ds}{dt}\delta ds=v\delta\, ds=\frac{dx}{dt}\delta dx+\frac{dy}{dt}\delta dy+\frac{dz}{dt}\delta dz \ \ldots\ldots (3).$$

Quindi (1) diviene, per (2) e (3), e siccome d e δ seguono la legge commutativa,

$$0=\int\frac{1}{v^2}\left(\frac{dx}{dt}\,d\delta x+\frac{dy}{dt}\,d\delta y+\frac{dz}{dt}\,d\delta z\right)$$
$$-\int\frac{1}{v^2}(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{v^2}\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)\right]$$
$$-\left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)\right\}$$
$$-\int dt\left[\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v^2}\frac{dx}{dt}\right)+\frac{X}{v^2}\right\}\delta x+\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v^2}\frac{dy}{dt}\right)+\frac{Y}{v^2}\right\}\delta y\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v^2}\frac{dz}{dt}\right)+\frac{Z}{v^2}\right\}\delta z\right],$$

integrando il primo termine per parti. I termini integrati in [ ] appartengono al limite superiore, quelli in { } all'inferiore.

Ma, se i punti estremi sono dati, abbiamo nei due limiti

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

e quindi i termini indipendenti dal segno integrale svaniscono. Affinchè l'integrale sia identicamente zero, dobbiamo avere, poichè δx, δy, δz sono indipendenti,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v^2}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{X}{v^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

con simili espressioni in y e z. L'eliminazione di t, e v o $\frac{ds}{dt}$, da queste equazioni ci darà le due equazioni differenziali della curva richiesta, le forze X, Y, Z essendo per ipotesi funzioni di v, y, z solamente.

187. Ma senza liberarci da v possiamo dimostrare due proprietà comuni a tutte queste Brachistocrone.

Eliminando t da (4) abbiamo

$$v\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}\right) + \frac{X}{v^2} = 0 ,$$

o

$$v^2\frac{d^2x}{ds^2} - v\frac{dv}{ds}\frac{dx}{ds} + X = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

con simili espressioni in y e z.

Moltiplicando queste in ordine per λ, μ, ν e sommando; se prendiamo λ, μ, ν tali che

$$\left.\begin{aligned} \lambda\frac{d^2x}{ds^2} + \mu\frac{d^2y}{ds^2} + \nu\frac{d^2z}{ds^2} &= 0 \\ \lambda\frac{dx}{ds} + \mu\frac{dy}{ds} + \nu\frac{dz}{ds} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

avremo ancora

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Ora (6) mostra che la linea di cui i coseni di direzione sono come λ, μ, ν è perpendicolare al raggio di curvatura assoluta della traiettoria, ed anche alla tangente; cioè, essa è normale

al piano osculatore. Inoltre per (7) la stessa linea è perpendicolare alla risultante di X, Y, Z.

Quindi, *il piano osculatore in ogni punto contiene la risultante delle forze impresse.*

Inoltre, se ρ è il raggio di curvatura assoluta,

$$\rho = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ed i suoi coseni di direzione sono

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2},\ \rho\frac{d^2y}{ds^2},\ \rho\frac{d^2z}{ds^3};$$

quindi, moltiplicando le equazioni (5) per

$$\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2},$$

e sommando; osservando che, essendo

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

abbiamo $$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

otteniamo l'equazione

$$\frac{v^2}{\rho} = -\left(X\rho\frac{d^2x}{ds^2} + Y\rho\frac{d^2y}{ds^2} + Z\rho\frac{d^2z}{ds^2}\right) \ \ldots\ldots \ (8),$$

la quale esprime che *la parte della pressione dovuta alla velocità è eguale a quella prodotta dalle forze impresse.*

188. Se i punti estremi non sono definitivamente assegnati (se, per esempio, si voglia trovare la curva della più celere discesa da una curva data ad un'altra) non abbiamo più

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0$$

ai limiti; ma, con le richieste modificazioni, il procedimento nell'Art. 187 ci abilita a trovare le condizioni adatte in ogni caso. Tali quistioni, però, presentano difficoltà che appartengono più al Calcolo delle Variazioni che alla Cinetica.

Così, supponiamo che il punto finale della traiettoria debba giacere sopra

$$F(x, y, z) = 0 ,$$

abbiamo $$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0 \quad \text{............} \quad (1).$$

Inoltre affinchè [ ] svanisca, il che è necessario affinchè δt sia zero, dobbiamo avere

$$\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dz}\delta z = 0 \quad \text{................} \quad (2).$$

Ora la sola relazione tra δx, δy e δz è (1), alla quale (2) devè essere equivalente: quindi

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} :: \frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} : \frac{dF}{dz}.$$

Queste equazioni mostrano che l'elemento mobile incontra la superficie estrema ad angoli retti. Una simile condizione si vede facilmente che ha luogo se il punto iniziale della traiettoria deve anche giacere sopra una data superficie, purchè l'intera energia sia data e la data superficie sia un'*equipotenziale*. Se essa non è equipotenziale, dei termini dipendenti da δx_0, δy_0, δz_0, compariranno nell'integrale e dovranno essere presi insieme con { }.

Se un punto estremo deve giacere sopra una *curva* data la condizione deve essere determinata in modo simile.

189. *Un elemento si muove sotto l'azione di date forze sopra una data superficie levigata; determinare il movimento, e la pressione sulla superficie.*

Sia $$F(x, y, z) = 0 \quad \text{....................} \quad (1),$$

l'equazione della superficie, R la forza che agisce nella normale della superficie, che è il solo effetto della sua resistenza. Allora se λ, μ, ν sono i suoi coseni di direzione, sappiamo che

$$\lambda = \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right\}}} \quad \text{........} \quad (2),$$

con simili espressioni per μ e ν; i coefficienti differenziali essendo parziali.

Se X, Y, Z sono le forze impresse, le nostre equazioni del moto sono, evidentemente,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + R\lambda \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + R\mu \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + R\nu\end{aligned}\right\} \text{.....................} \quad (3).$$

Moltiplicando le equazioni (3) rispettivamente per

$$\frac{dx}{dt}, \; \frac{dy}{dt}, \; \frac{dz}{dt},$$

e sommando, otteniamo

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = \left[\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}\right]$$

$$= X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} \text{ ....} \quad (4).$$

R sparisce da questa equazione, poichè il suo coefficiente è

$$\lambda\frac{dx}{dt} + \mu\frac{dy}{dt} + \nu\frac{dz}{dt},$$

e svanisce, poichè la linea i di cui coseni di direzione sono proporzionali a $\frac{dx}{dt}$, etc. essendo la tangente alla traiettoria, è perpendicolare alla normale della superficie.

Se supponiamo che X, Y, Z siano forze tali come si trovano in natura, (Cap. II.) l'integrale di (4) sarà della forma

$$v^2 = \varphi(x, y, z) + C \text{ ....} \quad (5),$$

e la velocità in ogni punto dipenderà solamente dalle circostanze iniziali della proiezione, e non dalla forma della traiettoria percorsa.

Per trovare R, si moltiplichino le equazioni (3) in ordine per λ, μ, ν, si sommino, e si osservi che $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$. Otteniamo così

$$\lambda\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{d^2y}{dt^2} + \nu\frac{d^2z}{dt^2} = X\lambda + Y\mu + Z\nu + R.$$

Ora, poichè $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$, etc.

$$\lambda\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{d^2y}{dt^2} + \nu\frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left\{\lambda\frac{d^2x}{ds^2} + \mu\frac{d^2y}{ds^2} + \nu\frac{d^2z}{ds^2}\right\};$$

poichè, evidentemente, $\lambda\frac{dx}{ds} + \mu\frac{dy}{ds} + \nu\frac{dz}{ds} = 0$.

Ma, se ρ è il raggio di curvatura della sezione normale condotta per δs, ρ_1 il raggio di curvatura assoluta della traiettoria, abbiamo, pel Teorema di Meunier,

$$\rho\left(\lambda\rho_1\frac{d^2x}{ds^2} + \mu\rho_1\frac{d^2y}{ds^2} + \nu\rho_1\frac{d^2z}{ds^2}\right) = \rho_1.$$

Quindi
$$\lambda\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{d^2y}{dt^2} + \nu\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{v^2}{\rho},$$

e l'equazione precedente diviene

$$\frac{v^2}{\rho} = X\lambda + Y\mu + Z\nu + R,$$

che dà la pressione normale sulla superficie.

190. *Trovare la curva che l'elemento descrive sulla superficie.*

Per questo oggetto dobbiamo eliminare R dalle equazioni (3). Con questo procedimento otteniamo

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2} - X}{\lambda} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} - Y}{\mu} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2} - Z}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

due equazioni, tra le quali se si elimina t, il risultato è l'equazione differenziale di una seconda superficie che interseca la prima nella curva descritta.

191. Tanto per il problema generale, facciamo ora delle ipotesi particolari.

Se non vi sono forze impresse sull'elemento, abbiamo da (5),

$$v^2 = C,$$

e le equazioni (6) diventano, poichè in questo caso

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=C\frac{d^2x}{ds^2}, \text{ etc. etc.},$$

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\lambda}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\mu}=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\nu}.$$

Ora $\frac{d^2x}{ds^2}$, etc. sono proporzionali ai coseni di direzione del raggio di curvatura assoluta della traiettoria; λ, μ, ν sono quelli della normale alla superficie. Quindi queste linee coincidono, o la normale della superficie giace nel piano osculatore della traiettoria.

Ma questa è la proprietà della linea più lunga o più corta che congiunge due punti sopra una superficie, quindi abbiamo la seguente singolare proposizione.

Se un elemento, non assoggettato ad alcuna forza, si muove da un punto ad un altro sopra una superficie levigata, la lunghezza della linea descritta sarà un massimo o un minimo.

Questo risultato si dedurrà in seguito da un altro principio (Cap. IX.) ed allora fisseremo più precisamente il senso in cui la proposizione precedente si deve intendere.

192. *Un elemento si muove sopra una superficie di rotazione, la sola forza agente essendo la gravità in una direzione parallela all'asse della superficie; determinare il movimento.*

Si prenda l'asse della superficie per quello delle z, l'equazione si può scrivere

$$F(x, y, z)=f\{\sqrt{(x^2+y^2)}\}-z=0.$$

Questa si può mettere nella forma

$$f(\rho)-z=0,$$

se ρ è la distanza di un punto qualunque della superficie dall'asse.

Le equazioni (6) diventano

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{f'(\rho)\frac{x}{\rho}}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{f'(\rho)\frac{y}{\rho}}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}-g}{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

I primi due termini eguali ci danno, per il movimento riferito ad un piano perpendicolare all'asse, l'equazione

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

Ma se θ è l'angolo tra il piano che contiene ρ e l'asse delle z, ed un piano fisso condotto per quell'asse; vediamo (Art. 24, 121) che questo è equivalente a

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost.} = h \quad\quad (8).$$

Ora
$$\frac{dz}{dt} = f'(\rho)\frac{d\rho}{dt} = f'(\rho)\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{hf'(\rho)}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}.$$

Quindi
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{h^2}{\rho^2}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{f'(\rho)}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right\}.$$

Nelle equazioni (7), si moltiplichino il numeratore ed il denominatore della prima frazione per x, e quelli della seconda per y; indi si sommino i loro numeratori e denominatori per formare i termini di una nuova frazione. Essa sarà evidentemente eguale a ciascuna delle altre, e quindi alla terza frazione in (7). Ciò dà

$$\frac{x\dfrac{d^2x}{dt^2} + y\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\rho f'(\rho)} = g - \frac{d^2z}{dt^2} \quad\quad (9).$$

Ora differenziando l'equazione $x^2+y^2=\rho^2$, otteniamo

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = \rho\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta};$$

e, con una seconda differenziazione,

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{h^2}{\rho^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}\right),$$

e (9) diviene

$$\frac{\dfrac{h^2}{\rho^2}\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{d\theta}\right) - \dfrac{h^2}{\rho^4}\left\{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right\}}{\rho f'(\rho)} = g - \frac{h^2}{\rho^2}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{f'(\rho)}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right\};$$

o,
$$\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho^2 = \frac{\rho^5 f'(\rho)}{h^2}\left[g - \frac{h^2}{\rho^2}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{f'(\rho)}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right\}\right],$$

l'equazione differenziale della proiezione della traiettoria sul piano delle xy. Se omettiamo il termine che contiene g, vediamo, per l'Art. 191, che l'equazione precedente rappresenterà la proiezione sopra xy di una linea geodetica della data superficie.

193. *Si supponga che il movimento abbia luogo in una coppa sferica; o, in altri termini, l'elemento sia sospeso per mezzo di un filo da un punto fisso.*

Questo è il moto più generale del *Pendolo Semplice.*

Si prenda il centro per origine, e l'asse delle z verticalmente in giù.

Allora $$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

è l'equazione della superficie resistente, e le equazioni del movimento sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{a},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{a},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - R\frac{z}{a}.$$

Quindi, $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = C + 2gz$$

$$= V^2 - 2g(k - z) \ldots\ldots (1),$$

se V e k sono i valori iniziali di v e z.

Ma $$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

o, $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = h \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Inoltre $$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

per l'equazione della superficie.

Quindi, eliminando $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ da (1), (2), (3), abbiamo

$$t = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{[(a^2 - z^2)\{V^2 - 2g(k - z)\} - h^2]}} \ldots\ldots (4),$$

una funzione ellittica la quale, se fosse integrabile in termini finiti, darebbe z, e per conseguenza x ed y, in termini di t.

194. Un caso speciale interessante è quello del *Pendolo Conico*, come è chiamato, quando l'elemento si muove in un piano orizzontale e quindi in una traiettoria circolare, il filo descrivendo un cono retto circolare il di cui asse è verticale.

Qui z è costante, $=z_0$ supponiamo, e la terza delle equazioni del moto ci dà immediatamente

$$g - R\frac{z_0}{a} = 0,$$

sicchè le altre diventano

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{z_0}x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{z_0}y = 0.$$

Da queste abbiamo

$$x = \sqrt{a^2 - z_0^2}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{z_0}} + C\right),$$

$$y = \sqrt{a^2 - z_0^2}\,\mathrm{sen}\left(t\sqrt{\frac{g}{z_0}} + C\right),$$

ed il tempo di una completa rivoluzione è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}},$$

e dipende solamente dall'*altezza* del punto di sospensione sul piano dell'orbita circolare dell'elemento.

195. Se le oscillazioni intorno al punto più basso sono molto piccole, possiamo ottenere risultati interessanti con una soluzione *approssimata*.

Sia θ l'angolo tra l'asse delle z ed il raggio condotto all'elemento (l'inclinazione del filo alla verticale), ψ l'angolo che dinota l'azimut del piano che contiene queste due linee, ρ la distanza dell'elemento dall'asse. La proiezione sia fatta orizzontalmente con velocità V quando $\theta=\alpha$, $\psi=0$, $t=0$ insieme.

Allora, $z = a\cos\theta = a\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$, prossimamente,

$$k = a\cos\alpha = a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Inoltre (2) dà immediatamente,

$$\rho^2 \frac{d\psi}{dt} = h = a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{V}{a \operatorname{sen} \alpha} = a\, V\alpha, \text{ prossimamente} \ldots\ldots (5).$$

Quindi da (4), $t = \int \frac{a^2\theta\, d\theta}{\sqrt{[a^2\theta^2\{V^2 - ga(\theta^2 - \alpha^2)\} - a^2V^2\alpha^2]}}$

$$= \left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{\{(\alpha^2 - \theta^2)(\theta^2 - \beta^2)\}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

se $\beta^2 = \frac{V^2}{ga}$ non è maggiore di α^2. Se accade il contrario, i segni dei fattori nel denominatore debbono essere cambiati.

Quindi, il valore di θ giace tra α e β.

[Se $\alpha = \beta$, o $V^2 = ga\alpha^2$, il valore di θ è costante ed abbiamo di nuovo il caso del pendolo conico].

Possiamo ora porre (6), supponendo $\alpha > \beta$, e ponendo per semplicità

$$\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = n,$$

nella forma

$$nt = \int \frac{\theta\, d\theta}{\left\{\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2 - \left(\theta^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}};$$

e se introduciamo una nuova variabile, ω, tale che

$$\theta^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) + \omega(\alpha^2 - \beta^2)}{2},$$

abbiamo $\quad 2nt = \int \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2)}};$

o $\quad 2n(t + C) = \cos^{-1} \omega.$

Ma quando $\quad t = 0, \quad \theta = \alpha, \quad \omega = 1;$

quindi $\quad \omega = \cos 2nt;$

onde $\quad \theta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \cos 2nt;$

o, sostituendo per il coseno dell'arco doppio,

$$\theta^2 = \alpha^2 \cos^2 nt + \beta^2 \operatorname{sen}^2 nt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Il valore di θ^2 è perciò periodico. Per $t = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}$, etc. abbiamo $\theta = \alpha$; e per $t = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}$, etc. $\theta = \beta$. Quindi il periodo è $\frac{\pi}{n}$.

196. Per trovare il movimento del piano in cui è misurato θ, ritorniamo all'equazione (5),

$$\rho^2 \frac{d\psi}{dt} = a\, V\alpha;\ \text{la quale dà}\ d\psi = \frac{V\alpha\, dt}{a\,\theta^2} = n\frac{\alpha\beta}{\theta^2}\, dt,$$

o, da (7),

$$= n\alpha\beta \frac{dt}{\alpha^2 \cos^2 nt + \beta^2 \operatorname{sen}^2 nt};$$

l'integrale della quale (Art. 138) è

$$\psi + C = \tan^{-1}\left\{\frac{\beta}{\alpha} \tan nt\right\}.$$

Ma $\psi = 0$, $t = 0$ insieme; questo dà $C = 0$, e finalmente

$$\tan\psi = \frac{\beta}{\alpha} \tan nt \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8).$$

È facile da ciò dedurre i risultati seguenti, cioè che ciascun quarto di rivoluzione di questo piano si compie nello stesso tempo, e simultaneamente col cambiamento di θ in quel piano da α a β, o da β ad α. Inoltre che, qualunque sia la posizione iniziale, il tempo del giro di questo piano per due angoli retti è lo stesso, cioè, $\frac{\pi}{n}$.

197. Se eliminiamo t fra (7) ed (8), troviamo

$$\theta^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2\psi + \beta^2 \cos^2\psi}.$$

Questa è della stessa forma dell'equazione polare di un'ellisse intorno al centro. La proiezione della traiettoria dell'elemento sopra un piano orizzontale è perciò approssimativamente un'ellisse, i suoi semiassi essendo $a\alpha$, $a\beta$.

198. *Determinare approssimativamente l'angolo apsidale, quando l'orbita è molto piccola.*

In un apside z è naturalmente un massimo o un minimo, e perciò $\frac{dz}{dt} = 0$. Questo dà, per l'Art. 193 (4),

$$(a^2 - z^2)\{V^2 - 2g(k - z)\} - h^2 = 0 \ \ldots\ldots\ (1),$$

di cui le due radici positive sono i valori alternati di z agli apsidi. Poichè abbiamo supposto che l'elemento sia stato proiettato orizzontalmente, il punto di proiezione è un apside; e quindi k è una radice di questa equazione.

Sostituendo k per z, abbiamo

$$h^2 = V^2(a^2 - k^2)\,;$$

quindi (1) diviene dopo le riduzioni

$$(k - z)\,\{(k + z)\,V^2 - 2g\,(a^2 - z^2)\} = 0 \;\ldots\ldots\; (2).$$

E, se l è l'altra radice positiva di (1) e (2), abbiamo

$$V^2 = \frac{2g\,(a^2 - l^2)}{k + l}\,,$$

ed
$$h^2 = \frac{2g\,(a^2 - k^2)(a^2 - l^2)}{k + l}\,.$$

Ancora se $-\gamma$ è la terza radice di (1),

$$\gamma - l = \frac{V^2}{2g}\,,\ \text{o da (2)},\ = \frac{a^2 - l^2}{k + l}\,.$$

Quindi
$$a + \gamma = \frac{(a + k)(a + l)}{k + l}\,.$$

Ora
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{h}{a^2 - z^2}\,;\ \text{e perciò}$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{h}{a^2 - z^2}\;\frac{a}{\sqrt{\{2g\,(z - k)(l - z)(\gamma + z)\}}}\,.$$

Quindi l'angolo apsidale, o il valore di ψ da $z = k$ a $z = l$,

è
$$\psi_0 = a\left\{\frac{(a^2-k^2)(a^2-l^2)}{k+l}\right\}^{\frac{1}{2}}\int_k^l \frac{dz}{(a^2-z^2)\sqrt{\{(z-k)(l-z)(\gamma+z)\}}}\,.$$

Per mandar via γ si ponga $z = a - \varpi$, l'integrale diviene

$$\int_{a-l}^{a-k} \frac{d\varpi}{\varpi(2a-\varpi)\left[\{(a-k)-\varpi\}\{\varpi-(a-l)\}\left\{\frac{(a+k)(a+l)}{k+l} - \varpi\right\}\right]^{\frac{1}{2}}}\,;$$

e, sviluppando secondo le potenze di ϖ quei fattori di cui la va-

riazione è piccola in paragone di loro stessi, abbiamo finalmente

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\{(a-k)(a-l)\}}\int_{a-l}^{a-k}\frac{Pd\varpi}{\varpi\sqrt{[\{(a-k)-\varpi\}\{\varpi-(a-l)\}]}}$$

dove $$P = 1 + \frac{\varpi}{2}\left\{\frac{1}{a} + \frac{k+l}{(a+k)(a+l)}\right\} + \text{etc.}$$

Sostituendo questo valore di P ed integrando, abbiamo

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{\{(a-k)(a-l)\}}\left\{\frac{1}{a} + \frac{k+l}{(a+k)(a+l)}\right\} + \dots\right].$$

L'integrazione si può facilmente spingere più innanzi, tutt'i termini essendo evidentemente positivi, ma abbiamo abbastanza per mostrare che l'angolo apsidale è maggiore di $\frac{\pi}{2}$, e che perciò nella traiettoria ellittica approssimata considerata nell'ultimo articolo l'apside si avanza continuamente.

Nel caso di questa orbita, se p e q sono i suoi semiassi, abbiamo, per le proprietà della sfera,

$$\left.\begin{aligned} a - k &= \frac{p^2}{2a} \text{ prossimamente} \\ a - l &= \frac{q^2}{2a} \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\};$$

e quindi l'angolo apsidale è

$$\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{pq}{a^2} + \dots\right).$$

Da questo ne segue che, per un pendolo di data lunghezza, il valore della progressione dell'apside in una rivoluzione varia approssimativamente come l'area dell'orbita proiettata. Per diversi pendoli esso è proporzionale all'apertura sferica del cono descritto dal filo.

199. *Determinare la natura delle piccole oscillazioni eseguite da un elemento, sotto l'azione della gravità, intorno ad una posizione di equilibrio stabile sopra una superficie levigata.*

Il piano tangente nella posizione di equilibrio deve essere orizzontale, e la porzione contigua della superficie deve evidentemente stare *al di sopra* di esso affinchè l'equilibrio sia stabile.

Se ρ, ρ_1 sono i raggi di curvatura delle sezioni normali principali, e se gli assi delle x e delle y sono tangenti a queste sezioni rispettivamente, nel punto di contatto col piano orizzontale, sappiamo dalla Geometria analitica che l'equazione della superficie nelle vicinanze immediate dell'origine è della forma

$$2z - \frac{x^2}{\rho} - \frac{y^2}{\rho_1} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1).$$

Le equazioni del moto dell'elemento sono, come nell'Art. 189,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= R\lambda \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= R\mu \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= R\nu - g \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2),$$

dove λ, μ, ν sono i coseni di direzione della normale alla superficie nel punto x, y, z. Poichè x ed y sono molto piccole, z è del secondo ordine di piccole quantità per (1) e si può perciò trascurare, come si può anche trascurare $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Quindi $\lambda = -\frac{x}{\rho}$, $\mu = -\frac{y}{\rho_1}$, $\nu = 1$, prossimamente. Eliminando R dalle equazioni (2), abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{\rho}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{g}{\rho_1}y \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3),$$

le quali mostrano (Art. 168) che il movimento consiste di simultanee oscillazioni di pendolo semplice nei piani principali, le lunghezze del pendolo essendo i corrispondenti raggi di curvatura.

200. Dobbiamo ora considerare, brevemente, l'effetto della rotazione della terra sul movimento di un pendolo semplice. Strano a dirsi era riservato a Foucault d'indicare, nel Febbraio 1851, che il piano di vibrazione di un pendolo semplice sospeso ad uno dei due poli *apparirebbe* girare per 4 angoli retti in 24 ore, il piano, nel fatto, rimanendo costante di posizione mentre

gli oggetti al di sotto del pendolo erano portati in giro dalla rotazione diurna. All'equatore, era chiaro che un tale effetto non si avrebbe, almeno se il piano primitivo di vibrazione era da oriente ad occidente. Con un procedimento, di cui non dà notizia, egli giunse al risultato che il piano di oscillazione deve, in ogni latitudine, sembrare che faccia una completa rivoluzione in $24^{ore} \times$ cosec. lat. Questo risultato curioso è stato ampiamente verificato dall'esperimento.

201. Le equazioni del moto del pendolo, riferito ad assi rettangolari fissi nello spazio e condotti pel centro della terra, l'asse polare essendo quello delle z, sono evidentemente

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\frac{x-a}{l} + mX,$$

con simili espressioni in y e z; a, b, c essendo le coordinate del punto di sospensione, T la tensione, l la lunghezza del filo, ed X, Y, Z le componenti della gravità.

Le equazioni del moto riferito ad un nuovo sistema di assi, paralleli ai primi, ma condotti pel punto di sospensione, sono

$$\left. \begin{array}{l} m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{d^2a}{dt^2}\right) = -T\dfrac{x-a}{l} + mX - m\dfrac{d^2a}{dt^2} \\ \qquad \text{etc} = \text{etc.} \end{array} \right\} \ldots (1).$$

Riferiamo ora il moto ad assi che girano con la terra, ma condotti pel punto di sospensione. Se l'asse delle ξ si tira verticalmente, e gli assi delle η, ζ rispettivamente verso sud ed est; e se ωt è l'angolo al tempo t tra i piani delle xz e $\xi\eta$, λ essendo la co-latitudine del punto di sospensione, abbiamo immediatamente (supponendo che ξ interseghi z)

$$\cos x\xi = \operatorname{sen}\lambda\cos\omega t,\quad \cos x\eta = \cos\lambda\cos\omega t,\quad \cos x\zeta = -\operatorname{sen}\omega t,$$
$$\cos y\xi = \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\omega t,\quad \cos y\eta = \cos\lambda\operatorname{sen}\omega t,\quad \cos y\zeta = \cos\omega t,$$
$$\cos z\xi = \cos\lambda,\quad \cos z\eta = -\operatorname{sen}\lambda,\quad \cos z\zeta = 0.$$

Per mezzo di queste espressioni possiamo trovare subito i valori di $x-a$, $y-b$, $z-c$ in termini di ξ, η, ζ, t, come segue:

$$x - a = \xi\operatorname{sen}\lambda\cos\omega t + \eta\cos\lambda\cos\omega t - \zeta\operatorname{sen}\omega t,$$
$$y - b = \xi\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\omega t + \eta\cos\lambda\operatorname{sen}\omega t + \zeta\cos\omega t,$$
$$z - c = \xi\cos\lambda - \eta\operatorname{sen}\lambda.$$

Sia γ l'accelerazione dovuta alla gravità solamente, e ν l'angolo (presso a poco eguale a λ) che la sua direzione fa con l'asse

polare. [Abbiamo sopra infatti supposto che la sua direzione giaccia nel piano delle $z\xi$, siccome abbiamo supposto che l'asse delle ξ interseghi l'asse polare, mentre sappiamo che la forza centrifuga giace nel loro piano comune]. Sia r la distanza del punto di sospensione dal centro della terra, μ l'angolo che la sua direzione fa con l'asse polare. Allora

$$a = r \operatorname{sen}\mu \cos\omega t, \quad b = r \operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\omega t, \quad c = r\cos\mu.$$

Con questi dati le equazioni (1) diventano

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\lambda\left[\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\omega^2\right)\cos\omega t - 2\omega\frac{d\xi}{dt}\operatorname{sen}\omega t\right] \\
&+ \cos\lambda\left[\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\omega^2\right)\cos\omega t - 2\omega\frac{d\eta}{dt}\operatorname{sen}\omega t\right] \\
&- \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\omega^2\right)\operatorname{sen}\omega t - 2\omega\frac{d\zeta}{dt}\cos\omega t \\
&\qquad = -\frac{T}{lm}(\xi\operatorname{sen}\lambda\cos\omega t + \eta\cos\lambda\cos\omega t - \zeta\operatorname{sen}\omega t) \\
&\qquad - \gamma\operatorname{sen}\nu\cos\omega t + r\omega^2\operatorname{sen}\mu\cos\omega t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\lambda\left[\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\omega^2\right)\operatorname{sen}\omega t + 2\omega\frac{d\xi}{dt}\cos\omega t\right] \\
&+ \cos\lambda\left[\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\omega^2\right)\operatorname{sen}\omega t + 2\omega\frac{d\eta}{dt}\cos\omega t\right] \\
&+ \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\omega^2\right)\cos\omega t - 2\omega\frac{d\zeta}{dt}\cos\omega t \\
&\qquad = -\frac{T}{lm}(\xi\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\omega t + \eta\cos\lambda\operatorname{sen}\omega t + \zeta\cos\omega t) \\
&\qquad - \gamma\operatorname{sen}\nu\operatorname{sen}\omega t + r\omega^2\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\omega t.
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\lambda - \frac{d^2\eta}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda = -\frac{T}{lm}(\xi\cos\lambda - \eta\operatorname{sen}\lambda) - \gamma\cos\nu.$$

Siccome consideriamo solamente le piccole vibrazioni, dobbiamo trattare ξ (come z nell'Art. 199) come essendo praticamente eguale a $-l$, e trascurare i suoi coefficienti differenziali. Trascuriamo anche le potenze ed i prodotti di η, ζ, ed i termini in ω^2, eccetto quelli in cui esso è moltiplicato per una grande quan-

tità. Poichè si conosce che la forza centrifuga all'equatore è circa $\frac{1}{289}$ della gravità, o che approssimativamente

$$r\omega^2 = \frac{g}{289}\,.$$

Con queste semplificazioni le nostre equazioni diventano

$$\cos\lambda\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\omega t - 2\omega\frac{d\eta}{dt}\operatorname{sen}\omega t\right) - \frac{d^2\zeta}{dt^2}\operatorname{sen}\omega t - 2\omega\frac{d\zeta}{dt}\cos\omega t$$

$$= -\frac{T}{lm}\left(-l\operatorname{sen}\lambda\cos\omega t + \eta\cos\lambda\cos\omega t - \zeta\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$-\gamma\operatorname{sen}\nu\cos\omega t + r\omega^2\operatorname{sen}\mu\cos\omega t.$$

$$\cos\lambda\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}\operatorname{sen}\omega t + 2\omega\frac{d\eta}{dt}\cos\omega t\right) + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\cos\omega t - 2\omega\frac{d\zeta}{dt}\operatorname{sen}\omega t$$

$$= -\frac{T}{lm}\left(-l\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\omega t + \eta\cos\lambda\operatorname{sen}\omega t + \zeta\cos\omega t\right)$$

$$-\gamma\operatorname{sen}\nu\operatorname{sen}\omega t + r\omega^2\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\omega t.$$

$$-\frac{d^2\eta}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda = \frac{T}{lm}\left(l\cos\lambda + \eta\operatorname{sen}\lambda\right) - \gamma\cos\nu.$$

Le due prime si possono porre nella forma

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\lambda - 2\omega\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{T}{lm}\left(-l\operatorname{sen}\lambda + \eta\cos\lambda\right) - \gamma\operatorname{sen}\nu + r\omega^2\operatorname{sen}\mu.$$

$$-2\omega\frac{d\eta}{dt}\cos\lambda - \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{T}{lm}\zeta.$$

Ma, quando $\eta=0$, $\zeta=0$, abbiamo $T=mg$, sicchè

$$g\operatorname{sen}\lambda - \gamma\operatorname{sen}\nu + r\omega^2\operatorname{sen}\mu = 0,$$

$$g\cos\lambda - \gamma\cos\nu = 0,$$

e le nostre equazioni diventano

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\lambda - 2\omega\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{T}{m} - g\right)\operatorname{sen}\lambda - \frac{T}{lm}\eta\cos\lambda$$

$$-2\omega\frac{d\eta}{dt}\cos\lambda - \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{T}{lm}\zeta$$

$$-\frac{d^2\eta}{dt^2}\operatorname{sen}\lambda = \left(\frac{T}{m} - g\right)\cos\lambda + \frac{T}{lm}\eta\operatorname{sen}\lambda.$$

La prima e l'ultima danno

$$\frac{T}{m} - g = -2\omega \frac{d\zeta}{dt} \operatorname{sen}\lambda,$$

e quindi, sino al grado di approssimazione sopra determinato,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2\omega \cos\lambda \frac{d\zeta}{dt} + \frac{g}{l}\eta = 0, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\omega \cos\lambda \frac{d\eta}{dt} + \frac{g}{l}\zeta = 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Queste sono le equazioni del movimento del pendolo, riferito ad un piano orizzontale fisso alla terra. Se trascuriamo i termini di mezzo, che evidentemente dipendono dalla rotazione della terra, ricadiamo sulle equazioni degli Art. 194, 195.

202. Per interpetrare le equazioni (2) è conveniente di impiegare un secondo cambiamento di coordinate, di riferire il movimento ad assi che girano uniformemente nel piano η, ζ, con velocità angolare Ω. Se η', ζ' sono le coordinate riferite ai nuovi assi, abbiamo dalla Geometria analitica

$$\eta = \eta' \cos\Omega t - \zeta' \operatorname{sen}\Omega t, \quad \zeta = \eta' \operatorname{sen}\Omega t + \zeta' \cos\Omega t,$$

la sostituzione delle quali in (2) conduce alle equazioni

$$\frac{d^2\eta'}{dt^2} + \frac{g}{l}\eta' = 0, \quad \frac{d^2\zeta'}{dt^2} + \frac{g}{l}\zeta' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

se facciamo la supposizione

$$\Omega = -\omega \cos\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

ed omettiamo come sopra i termini dell'ordine ω^2.

(4) mostra che i nuovi assi girano, in direzione *opposta* a quella della terra, con la componente della velocità angolare della terra rispetto alla verticale del luogo. E nel piano, che così gira, vediamo da (3) che l'estremo del pendolo descrive la sua orbita approssimativamente ellittica come negli Art. 194, 195.

Una traiettoria *circolare* essendo evidentemente possibile, assumiamo come integrali particolari di (2)

$$\eta = a \cos(pt + \alpha), \quad \zeta = a \operatorname{sen}(pt + \alpha).$$

La sostituzione di questi valori dà lo stesso risultato

$$p^2 + 2\omega p \cos\lambda - \frac{g}{l} = 0,$$

in ciascuna delle equazioni (2). Ponendo come nell'Art. 195

$$\frac{g}{l} = n^2,$$

ed omettendo il quadrato di ω, abbiamo

$$p = \pm n - \omega \cos\lambda.$$

Questo mostra che l'estremo di un pendolo conico sembra rotare più celeramente (cioè il valore assoluto di p è maggiore) quando la direzione della rotazione è negativa (quella degli aghi di un orologio) che quando è positiva.

203. *Trovare la Brachistocrona per un elemento costretto a muoversi sopra una data superficie levigata, la gravità essendo la sola forza impressa.*

Sia $$F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

l'equazione della superficie data, z essendo l'asse verticale. Allora

$$\frac{d\eta}{dt} = \sqrt{\{2g(z - z_0)\}},$$

e quindi il tempo tra i dati punti è

$$t_0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\frac{ds}{dz}\,dz}{\sqrt{2g(z - z_0)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Dalla condizione che t_0 sia un minimo otteniamo

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{(z - z_0)}}\right\}\delta x + \frac{d}{dz}\left\{\frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{(z - z_0)}}\right\}\delta y = 0,$$

prendendo z per variabile indipendente, sicchè $\delta z = 0$.

Ma δx e δy non sono indipendenti, (1) ci dà

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dF}{dy}\right)\delta y = 0.$$

Quindi, eliminando, otteniamo

$$\frac{\frac{d}{dz}\left\{\frac{dx}{ds}\frac{1}{\sqrt{(z - z_0)}}\right\}}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = \frac{\frac{d}{dz}\left\{\frac{dy}{ds}\frac{1}{\sqrt{(z - z_0)}}\right\}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)},$$

la quale, per mezzo di (1), si può ridurre ad un'equazione diffe-

renziale del secondo ordine tra due variabili; l'integrale conterrà perciò due costanti arbitrarie, le quali ci abiliteranno a far passare la curva per i due punti dati.

204. *Un elemento sollecitato da forze qualunque, e che poggia sopra un piano orizzontale levigato, è legato con un filo inestensibile ad un punto che si muove in un dato modo in quel piano; determinare il moto dell'elemento.*

Siano x, y, x', y' le coordinate, al tempo t, dell'elemento e del punto, a la lunghezza del filo, ed R la forza di resistenza.

Per il moto dell'elemento abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X - R\frac{x-x'}{a} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - R\frac{y-y'}{a} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (1),$$

con la condizione $(x-x')^2+(y-y')^2=a^2$

Ora x', y' sono date funzioni di t. Si tolgano dai due membri delle equazioni in (1) le quantità $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, rispettivamente, ed abbiamo le equazioni del moto *relativo*

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2(x-x')}{dt^2} &= X - R\frac{x-x'}{a} - \frac{d^2x'}{dt^2} \\ \frac{d^2(y-y')}{dt^2} &= Y - R\frac{y-y'}{a} - \frac{d^2y'}{dt^2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (2).$$

Queste sono precisamente le equazioni che avremmo se il punto fosse fisso, ed in aggiunta alle forze X, Y ed R che agiscono sull'elemento, applicassimo in direzione opposta, le accelerazioni del movimento del punto con l'unità di massa sottintesa come un fattore. È evidente che lo stesso teorema avrà luogo in tre dimensioni. Le accelerazioni $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$ sono conosciute come funzioni di t, e quindi le equazioni del moto relativo sono completamente determinate. Si confronti l'Art. 26.

205. *Non vi siano forze impresse, e si supponga prima che il punto si muova uniformemente in una linea retta.*

Qui $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ sono costanti, e quindi non s'introducono termini nelle equazioni del moto. Abbiamo così il caso dell'Art. 28.

Ancora, *si supponga il movimento del punto essere rettilineo, ma uniformemente accelerato.*

Il moto relativo sarà evidentemente quello di un pendolo semplice da una parte all'altra della linea di movimento del punto. In alcuni casi, quando la velocità angolare eccede un certo limite, avremo il filo occasionalmente non teso; e ciò darà origine ad un urto (Cap. X) quando esso è di nuovo teso. Quando il filo non è teso l'elemento si muove, naturalmente, in una linea retta.

206. *Si supponga che il punto si muova, con uniforme velocità angolare* ω, *in un circolo di cui il raggio è* r *ed il centro è l'origine.*

Qui, supponendo che il punto parta dall'asse delle x,

$$x' = r\cos\omega t, \quad y' = r \operatorname{sen}\omega t.$$

Quindi le equazioni del moto sono, poichè

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\omega^2 x', \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = -\omega^2 y',$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2(x-x')}{dt^2} &= -R\frac{x-x'}{a} + \omega^2 x', \\ \frac{d^2(y-y')}{dt^2} &= -R\frac{y-y'}{a} + \omega^2 y', \\ (x-x')^2 + (y-y')^2 &= a^2. \end{aligned}\right\}$$

Da cui $$(x-x')\frac{d^2(y-y')}{dt^2} - (y-y')\frac{d^2(x-x')}{dt^2}$$
$$= \omega^2\{(x-x')y' - (y-y')x'\};$$

o, in coordinate polari, per il moto relativo,

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{d\theta}{dt}\right) = -\omega^2 ar\operatorname{sen}(\theta-\omega t),$$

o $$\frac{d^2(\theta-\omega t)}{dt^2} = -\omega^2\frac{r}{a}\operatorname{sen}(\theta-\omega t).$$

Ora $\theta-\omega t$ è l'inclinazione del filo al raggio che passa pel punto; si chiami φ, ed abbiamo

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\frac{r}{a}\operatorname{sen}\varphi,$$

che è l'equazione ordinaria del moto di un pendolo semplice la di cui lunghezza è $\frac{ga}{r\omega^2}$.

L'elemento quindi si muove, rispetto al raggio del circolo descritto dal punto che gira uniformemente, precisamente come un pendolo semplice rispetto alla verticale.

207. *Determinare il moto di un elemento sollecitato da date forze, e costretto a muoversi in un tubo levigato, in forma di una data curva piana, di sezione infinitamente piccola, che gira in dato modo intorno ad un asse nel suo piano.*

Sia l'asse di rotazione quello delle z, e la posizione dell'elemento al tempo t sia data dalla sua distanza r da quell'asse, il piano del tubo in quell'istante facendo un angolo θ con un piano fisso che passa per l'asse. Per le condizioni del problema θ è una data funzione di t.

Il solo effetto del tubo sarà di produrre una forza di resistenza, che giace nel piano normale al tubo, e si può perciò risolvere in due parti, una perpendicolare al piano del tubo, l'altra in quel piano e nella normale principale del tubo.

Si risolvano le forze impresse in tre, P secondo r, T perpendicolare al piano del tubo, ed S parallela all'asse delle z.

Siano R, R' le due parti risolute della forza di resistenza.

Le equazioni del moto saranno allora (per gli Art. 16, 63)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = P + R\frac{dz}{ds} \quad \text{.............. (1),}$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = T - R' \quad \text{.................. (2),}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = S - R\frac{dr}{ds} \quad \text{........................... (3),}$$

in cui s è l'arco della curva rotante.

In aggiunta a queste abbiamo le due equazioni

$$\theta = f(t) \quad \text{......................... (4),}$$

che dà la posizione del tubo ad ogni tempo, ed

$$r = \varphi(z) \quad \text{......................... (5),}$$

l'equazione del tubo.

Per mezzo di (4) e (5) possiamo eliminare θ, r, ed s da (1), (2), (3). Quindi eliminando R tra (1) e (3), otteniamo un'equa-

zione differenziale tra z e t, il di cui integrale insieme con (4) determina completamente la *posizione* dell'elemento ad ogni istante.

R ed R' si possono trovare poi da (1) o (3), e (2).

Nel caso più semplice quando la velocità angolare del tubo è costante, o $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, (4) diviene $\theta = \omega t$ se il piano dal quale si misura θ è quello del tubo al tempo $t = 0$.

Passiamo a dare un esempio o due.

208. *Un elemento si muove in un tubo rettilinco levigato che gira uniformemente intorno ad un asse verticale al quale esso è perpendicolare, determinare il movimento.*

Qui z = costante, $\frac{d\theta}{dt}$ = costante $= \omega$, $P = 0$, ed abbiamo da (1)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = 0\,;$$

onde
$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}.$$

Supponiamo che il moto incominci al tempo t=0 tagliando un filo, di lunghezza r_0, che congiunge l'elementó all'asse. La velocità dell'elemento in quell'istante secondo il tubo sarebbe zero. Quindi per $t = 0$

$$r = r_0 = A + B\,,$$

$$\frac{dr}{dt} = 0 = A - B;$$

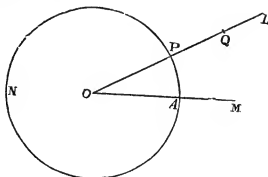
onde
$$A = B = \frac{r_0}{2}\,;$$

ed
$$r = \frac{r_0}{2}\,(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Nella figura, sia OM la posizione iniziale del tubo, A quella dell'elemento; OL, Q, il tubo e l'elemento al tempo t. Allora OA=r_0, arco AP=$r_0\omega t$, OQ=r, ed abbiamo

$$OQ = \frac{OA}{2}\left(e^{\frac{\text{arco}\,AP}{OA}} + e^{-\frac{\text{arco}\,AP}{OA}}\right).$$

Da questo vediamo che OQ e l'arco AP sono valori corrispon-

denti dell'ordinata e dell'ascissa di una catenaria il di cui parametro è OA.

Qui da (3), abbiamo evidentemente $R = g$.

Inoltre, da (2), $$R' = -2\frac{r_0\omega}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\omega$$

$$= -\omega^2 r_0 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

Da questa equazione, combinata col valore di r, deduciamo facilmente

$$R' = 2\omega^2\sqrt{(r^2 - r_0^2)},$$

ed essa è perciò proporzionale ad ogni istante alla tangente tirata da Q al circolo APN.

209. *Si supponga che il tubo giri uniformemente in un piano verticale intorno ad un asse orizzontale.*

Abbiamo dall'equazione (1) dell'Art. 207

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = -g\cos\omega t,$$

se supponiamo che il tubo sia verticale quando $t=0$. L'integrale di questa equazione è

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - g\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - \omega^2\right\}^{-1}\cos\omega t,$$

o $$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t;$$

e se $$r = r_0,\ \frac{dr}{dt} = 0, \text{ quando } t = 0,$$

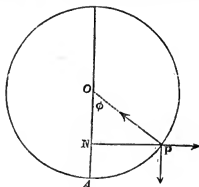
abbiamo $$r_0 = A + B + \frac{g}{2\omega^2},$$

e $$0 = A - B;$$

o $$r = \left(\frac{r_0}{2} - \frac{g}{4\omega^2}\right)(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) + \frac{g}{2\omega^2}\cos \omega t,$$

che completamente determina il moto. R ed R' si possono trovare come prima.

210. *Sia il tubo in forma di un circolo che gira uniformemente intorno ad un diametro verticale.*

Sia AO l'asse, P la posizione dell'elemento ad ogni tempo. Dinoti $\angle POA = \varphi$ la posizione dell'elemento. Allora le forze che

agiscono su di esso secondo l'elemento della curva in P sono le parti risolute della gravità e della forza centrifuga (Cap. IX) dovuta alla distanza NP dall'asse. Quindi essendo $AP = AO \cdot \varphi = a\varphi$, abbiamo

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a\omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - g \operatorname{sen}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

il primo integrale della quale è evidentemente

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \frac{2g}{a}\cos\varphi + C.$$

Supponiamo che l'elemento sia proiettato dal punto più basso con la velocità angolare ω_1; abbiamo, dall'ultima equazione scritta,

$$\omega_1^2 = \frac{2g}{a} + C.$$

Quindi $$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega^2 \left\{1 - \cos^2\varphi - \frac{2g}{a\omega^2}(1 - \cos\varphi)\right\} + \omega_1^2.$$

Questo sarà zero quando φ ha un valore determinato dall'equazione

$$\cos^2\varphi - \frac{2g}{a\omega^2}\cos\varphi = 1 - \frac{2g}{a\omega^2} + \frac{\omega_1^2}{\omega^2};$$

o $$\cos\varphi = \frac{g}{a\omega^2} \pm \sqrt{\left\{\left(1 - \frac{g}{a\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right\}}.$$

Ora, finchè $\frac{\omega_1^2}{\omega^2} > \frac{4g}{a\omega^2}$, o $\omega_1^2 > \frac{4g}{a}$, tutti e due i valori di $\cos\varphi$ sono numericamente maggiori di 1, e quindi il moto è di rivoluzione continua. Se $\omega_1^2 = \frac{4g}{a}$, abbiamo $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ per $\cos\varphi = -1$, e quindi l'elemento si ferma precisamente al punto più alto. Possiamo notare che $a^2\omega_1^2$, o il quadrato della velocità di proiezione dal punto più basso, è allora eguale a $2g \cdot 2a$, o la velocità è quella dovuta al diametro.

Quindi, se un elemento è proiettato dal punto più basso di un circolo verticale con velocità dovuta al diametro, esso tenderà a raggiungere il punto più alto ed ivi rimanere in quiete o che il circolo sia fisso o pure che giri con una velocità angolare qualunque intorno al diametro verticale: un altro esempio semplice di conservazione dell'energia. In questo caso la posizione dell'elemento ad ogni istante si può determinare.

Se $\omega_1^2 < \frac{4g}{a}$, vi è un valore possibile di $\cos\varphi$, e quindi l'elemento oscillerà intorno al punto più basso.

Supponiamo, ancora, che la proiezione sia fatta dall'estremità del diametro orizzontale. In questo caso la nostra equazione corretta diviene

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\omega^2\cos^2\varphi + \frac{2g}{a}\cos\varphi + \omega_1^2;$$

e per le posizioni di quiete

$$\cos^2\varphi - \frac{2g}{a\omega^2}\cos\varphi = \frac{\omega_1^2}{\omega^2};$$

o $$\cos\varphi = \frac{g}{a\omega^2} \pm \sqrt{\left(\frac{g^2}{a^2\omega^4} + \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)}$$

Tutti e due i valori saranno numericamente minori di 1, se

$$\sqrt{\left(\frac{g^2}{a^2\omega^4}+\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)}<1-\frac{g}{a\omega^2};$$

o

$$\frac{\omega_1^2}{\omega^2}<1-\frac{2g}{a\omega^2},$$

ed in questo caso le oscillazioni dell'elemento si eseguiranno tra i punti corrispondenti a questi valori di φ, e dalla stessa parte del diametro verticale.

211. La posizione di equilibrio dell'elemento si troverà ponendo $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0$. Quindi, se φ' è il valore corrispondente di AOP,

$$\cos\varphi'=\frac{g}{a\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Per trovare il tempo di una piccola oscillazione intorno a questa posizione, sia ψ l'angolo di spostamento, allora da (1),

poichè $\varphi=\varphi'+\psi$, ψ essendo molto piccolo,

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=\omega^2\,\mathrm{sen}(\varphi'+\psi)\left\{\cos(\varphi'+\psi)-\frac{g}{a\omega^2}\right\}$$

$$=-\omega^2\,\mathrm{sen}^2\varphi'\cdot\psi \text{ prossimamente, da (2),}$$

$$=-\left(\omega^2-\frac{g^2}{a^2\omega^2}\right)\psi,$$

e quindi per l'Art. 83, il tempo richiesto è

$$\frac{2\pi\, a\omega}{\sqrt{(a^2\omega^4-g^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Affinchè vi sia una posizione di equilibrio diversa dal punto più alto o più basso, dobbiamo avere da (2)

$$\omega>\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)},$$

e così (3) mostra che una piccola oscillazione è sempre possibile quando vi è una posizione di equilibrio diversa dal punto più alto o più basso.

212. *Trovare la forma del tubo affinchè l'elemento proiettato con data velocità possa conservare la sua velocità inalterata, la gravità agendo parallelamente all'asse.*

Risolvendo tangenzialmente, e prendendo le coordinate x, y nel piano della curva, l'asse di rotazione essendo quello delle y, abbiamo

$$\frac{d^2s}{dt^2} = x\omega^2\frac{dx}{ds} - g\frac{dy}{ds}.$$

Quindi, $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = x^2\omega^2 - 2gy + C.$$

Ma $$\frac{ds}{dt} = \text{costante}.$$

Quindi, $$x^2 = \frac{2g}{\omega^2}(y + k),$$

equazione di una parabola di cui l'asse è verticale ed il vertice in giù. Questo risultato poteva facilmente prevedersi, potendo la velocità essere costante solamente se l'effetto acceleratore delle forze impresse secondo la curva sia zero in ogni punto; cioè, se la risultante della gravità e della forza centrifuga cada nella normale. Affinchè ciò abbia luogo, dobbiamo avere Forza centrifuga : Gravità :: Ordinata : Sunnormale. Ma la forza centrifuga è proporzionale all'ordinata, quindi la sunnormale deve essere proporzionale alla gravità, cioè deve essere costante: proprietà particolare alla parabola. Questa proposizione ha un'applicazione singolare nell'Idrostatica.

ESEMPII.

1. Se un elemento, legato con un filo ad un punto, fa *esattamente* rivoluzioni complete in un piano verticale, la tensione del filo nelle due posizioni in cui esso è verticale è zero, e sei volte il peso dell'elemento, rispettivamente.

2. Un pendolo che vibra *i secondi* in un luogo A guadagna due battiti per ora in un luogo B; paragonare i pesi di una stessa sostanza qualunque nei due luoghi.

3. Da un punto sulla superficie di un cilindro cavo circolare verticale levigato, e nell'interno, si proietta un elemento in una direzione che fa un angolo α con la linea generatrice condotta pel punto; trovare la velocità di proiezione affinchè l'elemento salga ad una data altezza (h) al di sopra del punto, e la condizione affinchè il punto più alto sia verticalmente al di sopra del punto di proiezione.

4. Un elemento pesante poggia sull'arco di un circolo verticale levigato ad una distanza angolare di 30° dal punto più basso,

essendo respinto da una estremità del diametro orizzontale con una forza costante; mostrare che, se si sposta leggermente lungo l'arco, esso eseguirà delle piccole oscillazioni nel tempo

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{3\sqrt{3g}}}\,.$$

5. Un elemento è costretto a muoversi su di una curva levigata sotto l'azione di una forza centrale P che tende al polo, e la pressione sulla curva varia sempre come la curvatura, mostrare che

$$P \text{ come } \frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr}\,.$$

6. AB è il diametro di una sfera di raggio a; un centro di forza in A attrae con una forza ($\mu \times$ distanza); dall'estremità di un diametro perpendicolare ad AB si proietta un elemento lungo la superficie interna con una velocità $(2\mu)^{\frac{1}{2}}a$: mostrare che la velocità dell'elemento in ogni punto P è proporzionale a $\operatorname{sen}\theta$, e la pressione ad $1-3\operatorname{sen}^2\theta$, dove θ è l'angolo PAB.

7. Se un elemento si muove sulla superficie di un cono levigato col suo asse verticale ed il vertice in giù, e la gravità è la sola forza agente, mostrare che l'equazione differenziale della proiezione della sua traiettoria sopra un piano orizzontale è

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{h^2u^2}\,,$$

α essendo il semi-angolo al vertice del cono.

8. Un elemento è sospeso da un punto fisso per mezzo di un filo inestensibile: trovare la velocità con la quale esso deve essere proiettato quando si trova nel punto più basso, affinchè la sua traiettoria dopo che il filo non è più teso passi pel punto di sospensione.

9. Un elemento è costretto a rimanere sulla curva $r=a(1-\cos\theta)$ ed è respinto dal polo con una forza $=\frac{\mu}{r^2}$: se la sua velocità all'apside è eguale a $\left(\frac{\mu}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, mostrare che esso arriverà alla linea iniziale di nuovo nel tempo $\pi\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$.

10. Un elemento scende per una catenaria, il di cui piano è verticale ed il vertice in su, la velocità in ogni punto essendo quella dovuta al cadere dalla direttrice; dimostrare che la pres-

sione in ogni punto è inversamente proporzionale alla distanza di quel punto dalla direttrice.

11. Un elemento proiettato con data velocità, si muove sotto l'azione della gravità su di una curva in un piano verticale; trovare la natura della curva affinchè la pressione su di essa sia la stessa per tutto il moto.

12. Un elemento è proiettato con data velocità dal vertice di una cicloide il di cui asse è verticale ed il vertice in su, trovare dove esso lascerà la curva, ed il lato retto della sua futura traiettoria parabolica.

13. L'asse maggiore di un'ellisse è verticale, mostrare che affinchè un elemento proiettato verticalmente in su dall'estremità dell'asse minore lungo il lato concavo dell'arco passi pel centro dopo di aver lasciato la curva, la velocità di proiezione deve essere

$$\left\{\frac{(8a^2+b^2)g}{3a\sqrt{3}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

a e b essendo i semiassi dell'ellisse.

14. Supposta la Terra in riposo, e formata di strati sferici concentrici con densità che variano gradatamente dal centro alla superficie, investigare la legge della densità secondo la quale un elemento che cadesse per un foro diametrale eseguirebbe oscillazioni esattamente simili a quelle di un pendolo semplice che oscilla per 45° da ciascuna parte della verticale.

15. Mostrare che se un elemento scendendo dalla quiete in un punto per una cicloide invertita ha la sua velocità istantaneamente distrutta quando ha percorso la metà della sua altezza verticale al di sopra del punto più basso, e poi procede, perdendo sempre la sua velocità quando si trova a metà strada al di sotto dell'ultima posizione di velocità nulla, esso sarà ad $\frac{1}{2^{2n}}$ della sua altezza primitiva al di sopra del vertice dopo n volte il tempo che avrebbe impiegato per giungere sino al vertice senza alcun disturbo.

16. Mostrare che un pendolo semplice sotto l'azione di una forza centrale che varia come la distanza solamente si muoverà come sotto l'azione della gravità.

17. I tempi dell'oscillazione di un pendolo si sono osservati alla superficie della Terra, ed anche ad un'altezza h al di sopra della superficie; da questi dati trovare il raggio della Terra supposta sferica.

18. Un pendolo oscilla in un piccolo arco circolare, ed è sollecitato oltre della gravità da una piccola forza orizzontale come l'attrazione di una montagna. Mostrare in qual modo trovare l'ultima forza osservando il numero delle oscillazioni guadagnate in un dato tempo. Trovare ancora la direziono nella quale l'attrazione deve agire in modo da non alterare il tempo dell'oscillazione.

19. (Si vegga 11). Determinare la natura della curva attorno alla quale il filo di un pendolo semplice si deve avvolgere affinchè la sua tensione sia costante, e dedurre l'equazione tra la lunghezza dell'arco, e l'ordinata verticale

$$y = l - \frac{T}{g}(l-s) + C(l-s)^{\frac{2}{3}} - \frac{V^2}{2g},$$

in cui l è la lunghezza del filo, T la tensione costante, e V la velocità del pendolo quando il filo è verticale.

20. Un filo avvolto intorno ad un poligono regolare ha un elemento all'estremo libero che giunge esattamente ad un angolo. Nel centro vi è una forza ripulsiva come (D). Se v_r è la velocità quando si sono svolti r lati, mostrare che

$$v_r^2 = r\frac{(r+1)}{2}v_1^2,$$

l'elemento partendo dalla quiete. [Si formi l'equazione dell'energia].

21. Trovare la curva che seghi una serie di ellissi con lo stesso asse verticale e lo stesso vertice, in modo che un elemento scendendo por ciascuna di esse dalla quiete al punto di sezione prema egualmente nel vertice; nei seguenti casi,

(α) gli assi verticali $= a$.

(β) gli assi orizzontali $= b$.

(γ) le ellissi simili.

22. Trovare l'equazione di una curva in un piano verticale, tale che se un elemento discende per essa, le parti della pressione dovute alla velocità, ed alla gravità, abbiano un dato rapporto.

Se questo è e, e l'asse delle y è verticale, allora l'equazione differenziale è

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{C}{y}\right)^e - 1,$$

in cui C è una costante.

23. Trovare una curva tale che un elemento partendo dalla quiete descriverà ogni arco nello stesso tempo della corda, la forza essendo centrale e proporzionale alla distanza.

Dedurre (175) come un caso particolare.

24. Trovare ancora la curva in (175) quando il tempo della discesa per la corda è in un dato rapporto con quello per l' arco.

25. Trovare la curva in cui un elemento sollecitato dalla gravità girerà uniformemente intorno ad un punto nello stesso piano verticale.

26. Un elemento sollecitato da una forza centrale ripulsiva che varia come la distanza si muove in un tubo della forma di un'epicicloide, il polo essendo al centro di forza. Mostrare che le oscillazioni sono isocrone.

27. Un elemento è inizialmente in quiete in un punto della spirale $r = ce^{-m\theta}$, alla distanza d dal polo. Mostrare che se il polo è un centro di forza di cui l'attrazione $= \frac{\mu}{D^2}$, il tempo della caduta ad esso è

$$\frac{\pi}{2} \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2\mu)}} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}.$$

28. Nel problema precedente trovare la pressione sulla curva ad ogni istante.

29. Un elemento parte dalla quiete in un punto qualunque della circonferenza convessa di un circolo verticale, mostrare che esso lascerà il circolo dopo di esser disceso per un terzo della sua primitiva altezza verticale al di sopra del centro.

30. Un elemento sotto l'influenza della gravità è proiettato da un punto in una direzione orizzontale verso un altro punto, trovare la curva sulla quale esso deve essere costretto a muoversi in modo da avvicinarsi uniformemente al secondo punto.

31. Due elementi sono proiettati dallo stesso punto, nella stessa direzione, e con la stessa velocità, ma in diversi istanti, in un tubo circolare levigato di piccola sezione il di cui piano è verticale, mostrare che la linea che li congiunge tocca costantemente un altro circolo.

Si chiami il tubo il circolo A, e la linea orizzontale, ad una caduta dalla quale è dovuta la velocità, L. Siano m, m' posizioni corrispondenti degli elementi. Supponiamo che mm' passi nella

sua prossima posizione girando intorno ad O, queste due linee intercetteranno due archi infinitamente piccoli in m ed m', i quali (per una proprietà del cerchio) stanno nel rapporto $mO:m'O$.

Si descriva un altro circolo B che tocchi mm' in O, e tale che L sia l'asse radicale di A e B. Sia a la distanza tra i loro centri, e siano mp, $m'p'$ perpendicolari ad L. Intersegbi mp di nuovo A in q e B in r, s.

Allora per la Geometria,

$$mO^2 = rm \cdot ms = pm\,(rm - qs) = 2a \cdot pm = \frac{a}{g}\ (\text{velocità di } m)^2.$$

Similmente

$$m'O^2 = 2a \cdot p'm' = \frac{a}{g}\ (\text{velocità di } m')^2.$$

Quindi le velocità di m ed m' sono come $mO : m'O$, e quindi per ciò che si è mostrato sopra intorno agli archi elementari in m ed m', la posizione prossima di mm' è anche una tangente di B, il che dimostra la proposizione.

Si vede facilmente da ciò, che se *un* poligono di un dato numero di lati può essere inscritto in un circolo e circoscritto ad un altro, se ne possono descrivere in numero indefinito. Per questo dobbiamo supporre solamente più elementi che si muovano in A con velocità dovute ad una caduta da L, se essi formano in un tempo qualunque i vertici di un poligono i di cui lati toccano B, essi continueranno a fare lo stesso per tutto il moto. Questo però non appartiene al nostro soggetto.

32. Un elemento sotto l'azione della gravità è proiettato con data velocità da un punto, trovare la curva sulla quale esso deve essere costretto a muoversi in modo da allontanarsi uniformemente dal punto di proiezione.

33. Un treno di ferrovia viaggia verso il nord con data velocità. Paragonare la pressione orizzontale sulle rotaie, dovuta alla rotazione della Terra, col peso del treno.

34. Un elemento legato da un filo ad un punto si muove in un piano orizzontale. Un piccolo anello che passa intorno al filo si muove uniformemente in una linea retta orizzontale condotta pel punto. Mostrare in qual modo trovare l'equazione della traiettoria attuale, e mostrare che quella relativa all'anello ha l'equazione

$$r\theta = C.$$

35. Un elemento discende dalla quiete sotto l'azione della gravità. Trovare la curva sulla quale esso si deve muovere affinchè il rapporto dei tempi per discendere due spazii verticali il di cui rapporto è dato, sia eguale ad una data quantità.

Verificare il risultato generale nei casi particolari:

(α) Il doppio dell'altezza nel doppio del tempo.

(β) Quattro volte l'altezza in otto volte il tempo.

36. s è l'arco, ed y l'ordinata verticale di una curva che passa per l'origine. Se il tempo per s : al tempo per la corda di $s :: ks$: alla corda, mostrare che

$$s = Ay^{\frac{k}{2k-1}}.$$

37. Dato un arco di una curva, trovare la posizione nella quale esso deve essere fissato, affinchè un elemento partendo dalla quiete lo descriva sotto l'azione della gravità nel minimo tempo. Applicare il risultato ad un arco della cardioide misurato dalla cuspide.

38. Una serie di curve simili e similmente situate partono da un punto A in un piano verticale; trovare la curva sincrona, o sia quella che taglia da ciascuna curva della serie una porzione che sarebbe descritta in un dato tempo τ da un elemento che parte dalla quiete in A.

Prendendo A come origine, e l'asse delle y verticalmente in giù, abbiamo

$$\tau = \int_0^y \sqrt{\left\{\frac{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2gy}\right\}}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ora l'equazione comune delle curve contiene *un* parametro arbitrario α, il quale si troverà perciò in (1) quando si elimina x. Supponendo quindi che (1) si possa integrare, se tra l'integrale e l'equazione delle curve eliminiamo α, il risultato sarà l'equazione della serie richiesta di curve sincrone, in cui τ comparirà come un parametro variabile.

L'equazione della data serie di curve sarà naturalmente nella forma $\frac{x}{\alpha} = f\left(\frac{y}{\alpha}\right)$, sicchè se $\frac{y}{\alpha} = \omega$, $\frac{dx}{dy}$ in termini di ω non conterrà α. È quindi facile di dedurre i valori seguenti di x ed y

per la curva richiesta, in termini di ω,

$$x = \frac{\tau^2 f(\omega)}{\left[\int_0^\omega \sqrt{\left\{\frac{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2g\omega}\right\}} d\omega\right]^2},$$

$$y = \frac{\tau^2 \omega}{\left[\int_0^\omega \sqrt{\left\{\frac{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2g\omega}\right\}} d\omega\right]^2},$$

con i quali, se (1) non è integrabile, si può costruire la curva richiesta per quadrature.

39. Se t è il tempo in una cicloide dal punto che ha per ascissa il raggio del circolo generatore, sino ad ogni altro punto; τ il tempo della discesa per la corda del circolo generatore corrispondente agli stessi due punti, mostrare che

$$2\tan^{-1}\tau\sqrt{\frac{g}{2}} = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\tan t\sqrt{\frac{g}{2}}\right).$$

40. Un punto si muove in una scannellatura circolare di raggio a sotto l'azione di un centro di forza come D^{-2} situato ad una distanza b dal centro del circolo. Esso è proiettato dal punto più vicino con velocità V, mostrare che per una completa rivoluzione

$$V^2 \overline{\gtrless} \frac{4\mu b}{a^2-b^2}.$$

41. Un elemento sollecitato dalla gravità discende dalla quiete in un dato punto, trovare la natura della curva sulla quale esso si deve muovere affinchè la pressione sia ad ogni istante come il quadrato dell'altezza verticale della caduta.

42. Trovare la tautocrona quando la forza è come la radice cubica della distanza dall'asse delle x, e parallela a quello delle y.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

43. Trovare tutte le tautocrone quando la forza è centrale, e varia come la distanza.

Se S è la forza risoluta secondo la curva, dobbiamo avere

$$\frac{dS}{ds} = -\frac{\pi^2}{4\tau^2} \text{ (Art. 184).}$$

Ora se φ è l'angolo tra il raggio vettore e la tangente,

$$S = -\mu r \cos\varphi = -\mu r \frac{dr}{ds};$$

onde

$$\frac{d\left(r\frac{dr}{ds}\right)}{ds} = \frac{\pi^2}{4\mu\tau^2};$$

$$r\frac{dr}{ds}\frac{d}{ds}\left(r\frac{dr}{ds}\right) = \frac{\pi^2}{4\mu\tau^2}\, r\frac{dr}{ds},$$

o

$$\left(r\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4\mu\tau^2} r^2 + C;$$

cioè,

$$r^2 - p^2 = \frac{\pi^2}{4\mu\tau^2} r^2 + C.$$

E se a è quella perpendicolare dal centro sulla tangente che incontra quest'ultima nel suo punto di contatto, il valore corrispondente di r è anche a, e quindi

$$C = -\frac{\pi^2}{4\mu\tau^2} a^2;$$

onde

$$p^2 = \left(1 - \frac{\pi^2}{4\mu\tau^2}\right) r^2 + \frac{\pi^2}{4\mu\tau^2} a^2 \ldots\ldots\ \ldots\ldots (1),$$

che è l'equazione differenziale delle curve richieste.

Le curve differiranno in specie secondo il valore di $\frac{\pi^2}{4\mu\tau^2}$.

I. Sia $\frac{\pi^2}{4\mu\tau^2} > 1$, (1) prende la forma

$$p^2 = e^2 (c^2 - r^2),$$

che si riconosce immediatamente come l'equazione differenziale dell'epicicloide descritta da un punto nella circonferenza di un piccolo cerchio, che rotola nella superficie interna di un cerchio più grande il di cui centro è il polo.

Se supponiamo che il raggio del circolo più grande cresca indefinitamente, la sua circonferenza tende a divenire una linea retta e l'epicicloide a divenire una serie di cicloidi. La forza in questo caso tende ad essere costante, e perpendicolare alle basi di queste cicloidi, quindi nel limite abbiamo il risultato dell'Art. 168.

II. Sia $\frac{\pi^2}{4\mu\tau^2} = 1$.

Qui $p = a$ e la curva è una linea retta. Questo è il caso dell'Art. 88. [L'equazione $p = a$ rappresenta anche un circolo, l'inviluppo di tutte le sue tangenti. Ma questa soluzione non ha alcun significato dinamico.]

III. $\frac{\pi^2}{4\mu\tau^2} < 1$. In questo, come negli altri casi, possiamo trovare l'equazione della curva integrando (1) dopo di aver sostituito per p il suo valore in termini di r e θ, ma l'equazione che così otteniamo è molto complicata. Questa curva si trova essere una spirale con due rami simmetrici che si estendono ad una distanza infinita, e che si approssimano alle spirali che fanno gli angoli $= \cos^{-1} e$ col raggio vettore.

IV. Sia l'origine sulla curva, e sia il punto al quale si misura il tempo della discesa. Allora $a = 0$.

Se $\frac{\pi^2}{4\mu\tau^2} > 1$, l'equazione è impossibile.

Se esso $= 1$, abbiamo una linea retta per l'origine.

Se esso < 1, abbiamo la Spirale logaritmica.

V. Se la forza è ripulsiva, dobbiamo solamente cambiare il segno di μ. In questo caso abbiamo un'epicicloide tracciata da un punto di un circolo che rotola sull'esterno di un altro che ha per centro l'origine. Da questo possiamo dedurre ancora il tautocronismo della cicloide ordinaria per la gravità.

44. Un elemento che si muove sulla superficie interna di un cilindro circolare verticale è proiettato con una data velocità, e va in giro n volte prima che cada al livello del punto di proiezione. Determinare la direzione della proiezione.

45. Mostrare che un elemento che si muove sotto l'azione della gravità su di un'elica levigata il di cui asse è verticale, fa la prima rivoluzione dalla quiete nel tempo

$$\sqrt{\frac{8\pi a}{g \operatorname{sen} 2\alpha}}.$$

46. Una scannellatura è tagliata su di un cono retto di altezza h, sotto un angolo β con la linea generatrice. Mostrare che il tempo per giungere alla base, da un altezza verticale h_1 al di sotto del vertice, da un elemento che scende nella scannellatura è

$$\frac{\sqrt{h} - \sqrt{h_1}}{\sqrt{(8g)} \cos\alpha \cos\beta},$$

in cui α è il semi-angolo al vertice.

47. Trovare la curva sulla superficie di un cilindro verticale per la quale se scende un elemento, la forza di resistenza sia costante.

48. Un elemento si muove su di un ellissoide levigato, sotto l'azione di una forza come (D) nel centro. Data la velocità e la direzione con la quale esso passa l'estremità di un asse, trovare la pressione.

49. Un tubo levigato di sezione infinitamente piccola gira in un piano orizzontale. Un elemento attaccato all'asse di un filo elastico si muove nel tubo. Determinare le condizioni affinchè il moto sia oscillatorio.

50. Un tubo circolare di sezione infinitamente piccola gira con uniforme velocità angolare ω intorno ad un diametro verticale, ed un elemento in esso è proiettato dal punto più basso con velocità dovuta al diametro. Determinare il moto, e mostrare che l'elemento è alla sua massima distanza dall'asse dopo un tempo

$$\left(\frac{g}{a}+\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}} \log \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{2g}{a}+\omega^2\right)}+\sqrt{\left(\frac{g}{a}+\omega^2\right)}}{\sqrt{\left(\frac{2g}{a}+\omega^2\right)}-\sqrt{\left(\frac{g}{a}+\omega^2\right)}}};$$

in cui a è il raggio del tubo.

51. Se la sola forza impressa è una forza centrale $\frac{\mu}{D^n}$, e la velocità è quella dall'infinito, mostrare che l'equazione della brachistocrona è

$$r^{\frac{n+1}{2}} \cos^{\frac{n+1}{2}}(\theta+\beta)=a^{\frac{n+1}{2}}.$$

52. Un elemento materiale P, attaccato con una sottile corda di data lunghezza a, ad un punto S in un asse fisso SA, è attratto da una forza costante g in una direzione sempre parallela ad una linea SB, che è inclinata sotto un dato angolo all'asse SA, e gira intorno ad esso con una data velocità angolare ω: mostrare che se V = velocità di P, ω' = velocità angolare del piano PSA intorno ad SA, φ = ang. PSB, θ = ang. PSA,

$$V^2 = 2ga\cos\varphi + 2a^2\omega\omega' \operatorname{sen}^2\theta + \text{cost.}$$

Mostrare anche che le condizioni dinamiche di questo Problema sono le stesse di quelle di un pendolo sollecitato dalla gravità, quando si tiene conto della rotazione della Terra.

53. Un piccolo anello levigato scorre lungo una verga che si muove con velocità angolare uniforme ed in modo da essere sempre in contatto con un dato cerchio: determinare il movimento dell'anello relativamente alla verga.

54. Un anello scorre su di un filo metallico ellittico levigato che si muove nel suo proprio piano con velocità angolare uniforme intorno al suo centro. Determinare il movimento; e trovare il tempo di una piccola oscillazione intorno alla posizione di equilibrio dove questo è possibile.

55. Un elemento è attaccato con una verga senza massa all'estremità di un'altra verga, n volte più lunga, che gira in un dato modo intorno all'altra estremità, l'intero movimento avendo luogo in un piano orizzontale. Se θ è l'inclinazione delle verghe, ω la velocità angolare della seconda verga al tempo t, dimostrare che

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\omega}{dt}+n\left(\frac{d\omega}{dt}\cos\theta+\omega^2\operatorname{sen}\theta\right)=0.$$

56. Se un elemento scorre lungo una curva levigata, che gira con uniforme velocità angolare ω intorno ad un punto fisso O, allora la velocità dell'elemento relativamente alla curva mobile è data dall'equazione

$$v^2=c^2+\omega^2r^2,$$

in cui r è la distanza dell'elemento dal punto O; e la pressione sulla curva sarà data dalla formola

$$R=\frac{v^2}{\rho}+\omega^2p=2\omega v\,,$$

dove p è la perpendicolare da O sulla tangente.

57. Determinare (approssimativamente) il movimento di un pendolo semplice; quando il punto di sospensione descrive uniformemente, e con piccola velocità, un circolo orizzontale.

58. Se una curva gira uniformemente intorno ad un asse verticale e la sola forza estranea è la gravità, dimostrare che il tempo di un'oscillazione di un elemento che scorre sulla curva intorno alla sua posizione di quiete è

$$\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\rho\operatorname{sen}\alpha}{r-\rho\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha}}\,,$$

ρ essendo il raggio di curvatura nel punto di equilibrio, α l'angolo fatto dalla normale in quel punto con la verticale, r la di-

stanza del punto dall' asse di rotazione, ed ω la velocità angolare della curva.

59. Un tubo parabolico di lunghezza qualunque è fissato col suo asse verticale ed il vertice in giù, ed un elemento è spinto su di esso dal vertice con data velocità: mostrare che quando la lunghezza del tubo è tale che la corsa misurata dal vertice su di un piano orizzontale è un massimo, quella corsa $=\sqrt{2h(a+h)}$ in cui h è l' altezza dovuta alla velocità di proiezione.

60. Un elemento P è legato con fili ai due punti A e B nello stesso piano orizzontale, e descrive un circolo verticale. Quando l' elemento è al punto più basso, si taglia il filo AP e l'elemento passa a descrivere un circolo orizzontale; trovare il rapporto della nuova tensione di BP alla primitiva tensione.

61. Una pallina può scorrere sopra un arco circolare levigato AB ed è attratta da esso, la forza in ogni punto essendo $f(r)$; se essa è spostata dalla sua posizione di equilibrio, il tempo dell' oscillazione sarà

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2\cos\frac{\alpha}{2}f(AC)}},$$

dove C è il punto medio di AB, ed α l' angolo che AC sottende al centro del circolo.

62. Una pallina pesante scorre sopra un filo metallico circolare verticale, fisso, levigato, di raggio a; se essa è proiettata dal punto più basso con una velocità esattamente sufficiente a portarla al punto più alto, dimostrare che il raggio della pallina girerà in un tempo t per un angolo

$$2\tan^{-1}\frac{e^{\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}t}-e^{-\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}t}}{2}.$$

63. Un filo passa attraverso un piccolo foro in una tavola orizzontale levigata, ed ha masse eguali attaccate ai suoi estremi, l' una che pende verticalmente e l' altra che giace sulla tavola ad una distanza a dal foro; quest'ultima è proiettata con una velocità $\sqrt{ga}$ perpendicolarmente al filo; mostrare che l'altro elemento resterà in quiete, e se esso è leggermente disturbato il tempo di una piccola oscillazione sarà $2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$.

64. Un elemento descrive un circolo sotto l' azione di una forza

che tende ad un punto sulla circonferenza, il punto movendosi in modo da essere sempre un sesto della circonferenza indietro dell'elemento; trovare la forza e la velocità in ogni punto, e mostrare che i tempi per descrivere circuiti completi formeranno una progressione geometrica crescente di cui la ragione è $e^{2\pi\sqrt{3}}$.

65. Tre pesi eguali sono legati ad un filo di lunghezza $4a$, uno nel suo punto medio e gli altri alla metà delle distanze tra esso e le estremità, le quali sono attaccate a due punti in una linea orizzontale ad una distanza $a(\sqrt{3}+1)$ tra loro; trovare la posizione di equilibrio, e mostrare che se il peso di mezzo riceve un piccolo spostamento verticale il tempo di una oscillazione è

$$\pi\sqrt{\frac{a}{g}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)},$$

dove θ e φ sono rispettivamente le inclinazioni all'orizzonte delle porzioni, superiore ed inferiore, del filo nella posizione di equilibrio.

66. Se un elemento di peso w è proiettato orizzontalmente nell'interno di un cono circolare di angolo al vertice $\frac{\pi}{2}$ il di cui asse è verticale ed il vertice in giù con la velocità che acquisterebbe scendendo per una generatrice dal punto di proiezione sino al vertice, mostrare che:

1. Il moto è oscillatorio, e che l'elemento non scende mai più basso della sua posizione iniziale.

2. La curva descritta dall'elemento sul cono se si sviluppa in un piano ha per equazione

$$\rho^3\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2(r-\rho)(\rho^2+\rho r-r^2),$$

in cui r è la distanza dell'elemento dal vertice, ρ la distanza iniziale.

3. La reazione è data dall'equazione

$$R = \frac{w}{\sqrt{2}}\left\{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right\}.$$

67. Un elemento è proiettato su di un paraboloide levigato il di cui asse è verticale in modo da descrivere molto prossimamente un circolo di cui il diametro è il lato retto $2l$ della parabola generatrice; dimostrare che il tempo di una piccola oscillazione in una direzione verticale è $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

68. Un elemento pesante si muove nell'interno di un paraboloide di rotazione levigato il di cui asse è verticale ed il vertice in giù. Mostrare che l'equazione differenziale della sua traiettoria sopra un piano orizzontale è

$$4a^2u\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{d\theta}\right)=2\,\frac{ag}{h^2u^2},$$

dove $4a$ è il lato retto della parabola generatrice.

69. Un elemento sotto l'azione di una forza attrattiva che varia inversamente come il cubo della distanza da un dato piano, è costretto a muoversi su di una superficie sferica levigata, essendo stato proiettato con la velocità dovuta ad una distanza infinita; dimostrare che la forza efficiente sull'elemento passa sempre per un punto fisso.

70. Dimostrare che se un elemento si muove in un tubo levigato sotto l'azione di forze qualunque che tendono a centri, la pressione in ogni punto del tubo varierà come

$$\frac{1}{\rho}\left\{c-\Sigma\frac{1}{p}\frac{d}{dp}(p^2F)\right\},$$

dove $\frac{dF}{dr}$ è l'accelerazione verso uno qualunque dei centri, e ρ è il raggio di curvatura; e quindi che la pressione in ogni punto del tubo varierà come la curvatura quando l'orbita è tale quale potrebbe essere descritta liberamente sotto l'azione di ciascuna delle forze presa separatamente.

71. Una pallina scorre su di un filo metallico levigato in forma di una curva piana che gira intorno ad un asse verticale perpendicolare al suo piano. Dimostrare che la pallina oscillerà tra due punti di cui le distanze dall'asse sono eguali alla distanza iniziale dall'asse alla normale al filo per la posizione iniziale della pallina.

72. Un sottile tubo rettilineo gira in un piano con uniforme velocità angolare w intorno ad un punto nella sua lunghezza mentre il piano gira con uniforme velocità angolare w' intorno ad un asse orizzontale per quel punto, dimostrare che l'equazione del moto di un elemento pesante situato nel tubo è

$$\frac{d^2r}{dt^2}-(w^2+w'^2\cos^2 w't)\,r=g\,\mathrm{sen}\,w't\cos wt,$$

il tubo essendo inizialmente perpendicolare all'asse orizzontale ed il piano orizzontale.

CAPITOLO VIII.

Moto in un Mezzo resistente.

213. Quando un corpo si muovo in un fluido, sia liquido o gassoso, esso deve nello spostare gli elementi del mezzo e strofinando contro di essi, perdere una parte della sua propria velocità. La resistenza di un fluido ad un corpo che si muove in esso è quindi della natura delle forze ritardatrici; ma, in conseguenza della grande difficoltà di fare accurati esperimenti sull'oggetto, lo leggi della resistenza dei fluidi non sono state ancora stabilite in modo soddisfacento.

Per una velocità nè molto grande nè molto piccola, la legge generalo approssimata sembra essere, che la resistenza ad una superficie piana, che si muove col suo piano ad angoli retti alla linea del moto, è proporzionalo all'estensione della superficie, alla densità del mezzo resistente, ed al quadrato della velocità insieme. Però noi trattiamo solamente del moto di un elemento, in cui l'estensione della superficie non entra nella nostra considerazione, ed assumeremo che la resistenza dipenda interamente dalla densità del mezzo e dalla velocità dell'olemento; illustreremo, col supporre diverse leggi, il metodo di procedimento in tutti questi casi.

È bene che lo studente osservi che in tutt'i casi di resistenza i movimenti sono essenzialmente irreversibili. Non si tratta più di sistemi *conservativi* di forza, finchè almeno limitiamo la nostra attenzione solamente al movimento del corpo che soffro resistenza.

214. *Un elemento non sollecitato da alcuna forza è proiettato in un mezzo resistente di uniforme densità, di cui la resistenza varia come l'n^{ma} potenza della velocità; determinare il moto.*

Il moto sarà evidentemente rettilineo. Sia x la distanza dell'elemento da un punto fisso nella linea del moto al tempo t, v la sua velocità in quel tempo. La forza dovuta alla resistenza si può rappresentare con kv^n, k essendo una costante, e l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kv^2,$$

o

$$\frac{dv}{dt} = -kv^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ponendola nella forma

$$k\frac{dt}{dv} = -v^{-n},$$

abbiamo, con l'integrazione,

$$kt = C + \frac{v^{1-n}}{n-1}.$$

Supponiamo che l'elemento sia proiettato dall'origine, con velocità V, allora quando

$$t=0, \quad v=V; \quad \text{e} \quad C = -\frac{V^{1-n}}{n-1}.$$

Quindi $$(n-1)kt = v^{1-n} - V^{1-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

la relazione tra v e t. Essa mostra che v non può mai essere zero se $n>1$, ma se $n<1$ la velocità diverrà zero quando $t=\frac{V^{1-n}}{(1-n)k}$. Dopo ciò l'elemento resterà evidentemente in quiete.

Per trovare la distanza dell'elemento dall'origine ad ogni tempo, abbiamo da (2)

$$v = \frac{dx}{dt} = \left\{V^{1-n} - (1-n)kt\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

Quindi $$x = -\frac{1}{(2-n)k}\left\{V^{1-n} - (1-n)kt\right\}^{\frac{2-n}{1-n}} + \frac{V^{2-n}}{(2-n)k};$$

x e t essendo supposto che svaniscano insieme. Quando $n<1$, la distanza alla quale arriverà l'elemento, o la sua distanza dall'origine al tempo $\frac{V^{1-n}}{(1-n)k}$, è

$$\frac{V^{2-n}}{(2-n)k}.$$

215. Vi è un caso in cui la soluzione precedente è in difetto, cioè quando $n=1$, o la resistenza varia come la velocità. In questo caso, da (1),

$$\frac{dv}{dt} = -kv,$$

o $$k\frac{dt}{dv} = -\frac{1}{v},$$

dalla quale $$kt = C - \log v.$$

Quando $t = 0$, $v = V$; e $C = \log V$.

Quindi
$$kt = \log \frac{V}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3);$$

e perciò
$$v = \frac{dx}{dt} = Ve^{-kt}.$$

Integrando, abbiamo
$$x = \frac{V}{k}(1 - e^{-kt}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

la costante essendo determinata come sopra in modo che x e t svaniscano insieme.

Le equazioni (3) e (4) determinano la velocità e la posizione dell'elemento ad ogni istante. Esse mostrano che la velocità diminuisce senza diventare mai zero, ma che lo spazio percorso dall'elemento ha un limite definito, poichè quando

$$t = \infty, \quad x = \frac{V}{k}.$$

216. *Un elemento, sollecitato da una forza costante nella sua linea di movimento, si muove in un mezzo resistente di uniforme densità, di cui la resistenza varia come il quadrato della velocità; determinare il moto.*

Si supponga l'elemento proiettato dall'origine con la velocità V, e sia v la sua velocità ad un tempo qualunque t, x la sua distanza dall'origine in quel tempo, ed f l'accelerazione costante dovuta alla forza.

Sia K la velocità con la quale l'elemento dovrebbe essere animato affinchè la forza resistente fosse eguale ad f, allora la forza ritardatrice ad ogni tempo si può rappresentare con $f\frac{v^2}{K^2}$.

I. Agisca f in modo da diminuire x; allora l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f - f\frac{v^2}{K^2},$$

la quale, essendo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

si può scrivere o

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{K^2}(K^2 + v^2)$$

o

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{f}{K^2}(K^2 + v^2).$$

Queste ancora si possono cambiare in

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{K^2}{f}\frac{1}{K^2+v^2},$$

$$\frac{dx}{d(v^2)} = -\frac{K^2}{2f}\frac{1}{K^2+v^2}.$$

Integrando, e determinando le costanti sì che quando

$$x = 0, \quad t = 0, \quad v = V,$$

otteniamo

$$\frac{ft}{K} = \tan^{-1}\frac{V}{K} - \tan^{-1}\frac{v}{K} = \tan^{-1}\frac{K(V-v)}{K^2+Vv},$$

$$\frac{2fx}{K^2} = \log\frac{K^2+V^2}{K^2+v^2}.$$

Sia T il tempo al quale la velocità diviene zero, ed h il valore corrispondente di x, allora

$$T = \frac{K}{f}\tan^{-1}\frac{V}{K}, \text{ ed } h = \frac{K^2}{2f}\log\left(1+\frac{V^2}{K^2}\right).$$

Dopo questo l'elemento incomincia a ritornare, la forza di resistenza tende quindi ad accrescere x, e l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f + f\frac{v^2}{K^2},$$

la quale, come sopra, si può scrivere o

$$-\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{K^2}(K^2-v^2),$$

o

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{f}{K^2}(K^2-v^2).$$

Queste si possono cambiare in

$$\frac{dt}{dv} = \frac{K^2}{f}\frac{1}{K^2-v^2},$$

$$\frac{dx}{d(v^2)} = -\frac{K^2}{2f}\frac{1}{K^2-v^2}.$$

Integrando, e determinando le costanti sicchè quando

$$v = 0, \quad x = h, \quad t = T,$$

otteniamo
$$\frac{2f}{K}(t-T)=\log\frac{K+v}{K-v},$$
$$\frac{2f}{K^2}(h-x)=\log\frac{K^2}{K^2-v^2}.$$

Sia U la velocità con la quale l'elemento ritornerà al punto di proiezione; allora, ponendo $x=0$ nell'ultima equazione, otteniamo
$$\frac{U^2}{K^2}=1-e^{\frac{-2fh}{K^2}};$$
o, sostituendo per h il suo valore,
$$\frac{U^2}{K^2}=\frac{\frac{V^2}{K^2}}{1+\frac{V^2}{K^2}},$$
onde
$$\frac{1}{U^2}-\frac{1}{V^2}=\frac{1}{K^2}.$$

Questo mostra, come potevamo aspettarci, che l'elemento ritorna al punto di proiezione con velocità diminuita.

II. Agisca f in modo da aumentare x. Allora
$$\frac{d^2x}{dt^2}=f-f\frac{v^2}{K^2},$$
dalla quale deduciamo, come sopra,
$$\frac{dt}{dv}=\frac{K^2}{f}\frac{1}{K^2-v^2},$$
$$\frac{dx}{d(v^2)}=\frac{K^2}{2f}\frac{1}{K^2-v^2}.$$
Integrando, e determinando le costanti così che quando
$$t=0,\quad x=0,\quad v=V,$$
otteniamo
$$t=\frac{K}{2f}\log\frac{(K+v)(K-V)}{(K-v)(K+V)},$$
$$x=\frac{K^2}{2f}\log\frac{K^2-V^2}{K^2-v^2}.$$

Dall'ultima equazione otteniamo
$$v^2=K^2-(K^2-V^2)\,e^{\frac{-2fx}{K^2}}.$$

Questa equazione mostra che quando x diviene molto grande, v si avvicina a K, che è il suo valore limite. Se la velocità di proiezione è minore di K, v si avvicinerà continuamente a K, e non lo supererà mai, e se la velocità è maggiore di K, v diminuirà costantemente verso il limite K.

217. I risultati dell'ultima Proposizione sono applicabili ai corpi lanciati in un mezzo resistente verticalmente in su o in giù sotto l'azione della gravità; infatti l'accelerazione dovuta alla gravità si può sempre considerare costante, benchè non la stessa come per un elemento nel vuoto. L'attuale forza motrice è nel fatto la differenza tra il peso del corpo e quello del fluido spostato, sicchè se α è il rapporto della gravità specifica del fluido spostato a quella del corpo, la forza motrice

$$= W(1-\alpha) = Mg(1-\alpha),$$

dove W ed M sono il peso e la massa del corpo, e quindi l'accelerazione prodotta da essa $=g(1-\alpha)$. Sostituendo questa per f nei risultati dell'Art. 216, possiamo ottenere le formole per il movimento dei corpi in una direzione verticale sotto l'azione della gravità. La grandine e la pioggia somministrano una buona illustrazione della *Velocità Terminale* indicata dal risultato di II. Ma pel completo trattamento dei loro movimenti bisognerebbe prendere in considerazione l'attrito del fluido, ed il soggetto cessa di appartenere alla Dinamica di un elemento.

218. *Trovare le equazioni del moto, in un mezzo resistente, di un elemento sollecitato da forze qualunque.*

Siano x, y, z le coordinate dell'elemento relative ad un dato sistema di assi rettangolari, al tempo t, e siano X, Y, Z le accelerazioni componenti, parallele agli assi, dovute alle forze che agiscono sull'elemento. Allora dinotando con R l'accelerazione dovuta alla resistenza, che agisce nella tangente alla traiettoria descritta, ed in direzione opposta al movimento, abbiamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - R\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - R\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z - R\frac{dz}{ds}.$$

Queste sono le equazioni generali del moto. In ogni caso particolare R sarà data come una funzione della densità del mezzo

e della velocità dell'elemento, e metodi particolari saranno necessarii per ottenere la traiettoria dell'elemento e la sua posizione ad ogni tempo. Il metodo di procedimento sarà illustrato in ciò che segue.

219. *Un elemento sollecitato da una forza costante parallela ad una linea fissa è proiettato da un dato punto in una data direzione con una data velocità, e si muove in un mezzo uniforme di cui la resistenza varia come il quadrato della velocità; determinare il moto.*

Questo è, approssimativamente, il caso di un proiettile disturbato dalla resistenza dell'aria; e la sua soluzione è, sino ad un certo punto, utile in artiglieria.

Si prenda il punto dato per origine, l'asse delle x perpendicolare, e quello delle y parallelo, alla linea data, in modo che il piano delle xy contenga la direzione della proiezione. Sia f l'accelerazione costante dovuta alla forza; agente, supporremo, a diminuire y; allora l'effetto acceleratore della resistenza si può rappresentare con $k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ dove k è una costante. Quindi le equazioni del moto sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dx}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -f - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dy}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

La prima si può scrivere

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt};$$

e, quindi, dividendo per $\frac{dx}{dt}$ ed integrando, otteniamo

$$\log\frac{dx}{dt} = C - ks.$$

Supponiamo che u sia la componente della velocità iniziale parallela ad x: allora, quando $s = 0$

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \text{onde} \quad C = \log u, \text{ e}$$

$$\frac{dx}{dt} = ue^{-ks}.$$

Quindi $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = ue^{-ks}\frac{dy}{dx};$$

onde $$\frac{d^2y}{dt^2} = ue^{-ks}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} - kue^{-ks}\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dx}$$

$$= u^2e^{-2ks}\frac{d^2y}{dx^2} - kue^{-ks}\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dx}.$$

Ma da (2),
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -f - k\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}$$

$$= -f - kue^{-ks}\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dx}.$$

Paragonando questi otteniamo
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{f}{u^2}e^{2ks} = 0;$$

o, ponendo $$p = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{f}{u^2}e^{2ks} = 0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (3),$$

equazione differenziale della traiettoria.

Essa si può rendere integrabile una volta moltiplicando il primo membro per

$$\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\frac{ds}{dx}},$$ che è l'unità.

Questo dà $$\frac{dp}{ds}\sqrt{(1+p^2)} + \frac{f}{u^2}e^{2ks} = 0.$$

Integrando, e determinando la costante sicchè quando $s = 0$, $p = \tan\alpha$, α essendo l'angolo che la direzione della proiezione fa con l'asse delle x, otteniamo

$$p\sqrt{(1+p^2)} + \log\{p + \sqrt{(1+p^2)}\} + \frac{f}{ku^2}e^{2ks}$$

$$= \tan\alpha\sec\alpha + \log(\tan\alpha + \sec\alpha) + \frac{f}{ku^2} \quad\ldots\ldots\quad (4),$$

equazione intrinseca della traiettoria. Questa equazione non si può integrare ulteriormente.

Se facciamo $k=0$ nelle equazioni (1), (2), abbiamo le equazioni che appartengono alla traiettoria in un mezzo non resistente, la velocità iniziale e la direzione della proiezione essendo le stesse come in questo problema. Quindi se S, s sono archi delle traiettorie in un mezzo non resistente, ed in uno resistente, misurati dal punto di proiezione sino a due punti qualunque nei quali le tangenti sono parallele,

$$\frac{dp}{ds}\sqrt{(1+p^2)} = -\frac{f}{u^2}\frac{dS}{ds} = -\frac{f}{u^2}e^{2ks},$$

Quindi $$\frac{dS}{ds} = e^{2ks};$$

e perciò $$2kS = e^{2ks} - 1,$$

poichè supponiamo che S ed s incomincino insieme.

Quindi $$2ks = \log(1+2kS) \quad \text{.................} \quad (5).$$

220. Dall'equazione (3) apparisce che, come s diviene sempre più prossimamente eguale a $+\infty$, $\frac{dx}{dp}$ diviene sempre più prossimamente eguale a zero, e quindi x diviene sempre più prossimamente eguale ad una costante. Quindi la curva dalla parte positiva dell'origine tende continuamente a coincidere con una linea retta parallela all'asse delle y, ad una distanza finita, che è perciò un assintoto.

Inoltre, come x diviene sempre più prossimamente eguale a $-\infty$, $\frac{dp}{dx}$ diviene sempre più prossimamente eguale a zero, o p tende a divenire costante. La curva quindi dalla parte negativa dell'origine tende a divenire parallela ad una certa linea retta. Apparisce ancora dall'equazione (5) che quando $S=-\frac{1}{2k}$, s diviene $-\infty$, e quindi la curva tende a divenire parallela alla tangente in un punto della parabola ordinaria ad una distanza $-\frac{1}{2k}$ lungo la curva dall'origine. O, se θ è l'angolo che questa linea retta fa con l'asse delle x, abbiamo ponendo $s=-\infty$ nell'equazione (4),

$$\tan\theta\sec\theta - \tan\alpha\sec\alpha + \log\frac{\tan\theta+\sec\theta}{\tan\alpha+\sec\alpha} = \frac{f}{ku^2}.$$

Per mostrare che la curva ha un assintoto parallelo a questa

linea, dobbiamo dimostrare che x', la distanza del punto d'incontro della tangente con l'asse, dall'origine, è sempre finita.

Ora
$$x' = x - y\frac{dx}{dy};$$

il che dà
$$\frac{dx'}{dx} = -y\frac{d}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dx}.$$

Inoltre, se il valore finale di p si chiama n, avremo ultimamente
$$y = nx, \quad s = x\sqrt{(1+n^2)},$$

e, da (3)
$$\frac{dp}{dx} = -\frac{fe^{2ks}}{u^2};$$

onde
$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{fx}{nu^2}e^{2kx\sqrt{(1+n^2)}};$$

$$x' = -\int_0^x \frac{fx}{nu^2}e^{2kx\sqrt{(1+n^2)}}\,dx,$$

che, con l'integrazione, si troverà essere finito quando x è infinito e negativo.

Quindi la curva non è simile dalle parti opposte del vertice. L'elemento sale più obliquamente e scende più verticalmente di quel che farebbe nel vuoto.

221. Il proiettile avrà raggiunto il punto più alto quando $\frac{dy}{dx} = 0$. Questo dà, per la lunghezza della curva dall'origine al punto più alto, per l'equazione (4), l'espressione
$$\frac{1}{2k}\log\left[1 + \frac{ku^2}{f}\{\tan\alpha\sec\alpha + \log(\tan\alpha + \sec\alpha)\}\right],$$

e, per la velocità ivi, il valore
$$u\left[1 + \frac{ku^2}{f}\{\tan\alpha\sec\alpha + \log(\tan\alpha + \sec\alpha)\}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

222. I risultati precedenti si applicheranno, come nell'Art. 216, al movimento di un corpo lanciato nell'aria sotto l'azione della gravità, scrivendo per f il valore di g, corretto come nell'Art. 217. La più importante applicazione del problema è alla pratica delle armi rigate, nel qual caso p è sempre piccolo, e si può trovare un'equazione approssimata della traiettoria.

Infatti abbiamo $\frac{dp}{dx}+\frac{f}{u^2}e^{2ks}=0.$

Ora, poichè $\frac{ds}{dx}=\sqrt{(1+p^2)}=1$, se trascuriamo le potenze di p superiori alla prima, quest'equazione è la stessa che

$$\frac{dp}{dx}+\frac{f}{u^2}e^{2ks}\frac{ds}{dx}=0.$$

Integrando, ed osservando che quando $s=0$, $p=\tan\alpha$, otteniamo

$$p+\frac{f}{2ku^2}e^{2ks}=\tan\alpha+\frac{f}{2ku^2};$$

onde $$e^{2ks}=1+\frac{2ku^2}{f}(\tan\alpha-p).$$

Sostituendo nell'equazione (3), otteniamo

$$\frac{dp}{dx}+\frac{f}{u^2}+2k(\tan\alpha-p)=0,$$

o $$\frac{dp}{dx}-2kp=-\left(\frac{f}{u^2}+2k\tan\alpha\right).$$

Se moltiplichiamo questa equazione per e^{-2kx}, integriamo e determiniamo la costante come sopra, abbiamo

$$pe^{-2kx}=-\frac{f}{2ku^2}+\left(\frac{f}{2ku^2}+\tan\alpha\right)e^{-2kx};$$

o $$p=\frac{dy}{dx}=-\frac{f}{2ku^2}e^{2kx}+\left(\frac{f}{2ku^2}+\tan\alpha\right).$$

Integrando, ed osservando che quando $x=0$, $y=0$, abbiamo finalmente,

$$y=x\left(\tan\alpha+\frac{f}{2ku^2}\right)-\frac{f}{4k^2u^2}(e^{2kx}-1),$$

equazione approssimata della traiettoria richiesta.

Sviluppando secondo le potenze ascendenti di kx, cioè supponendo che il coefficiente di resistenza sia piccolo, abbiamo

$$y=x\tan\alpha-\frac{fx^2}{2u^2}-\frac{fkx^3}{3u^2}+\ldots..$$

di cui i termini che non contengono k riproducono, come doveva essere, l'equazione (3) dell'Art. 100.

223. *Un elemento, che si muove in un mezzo resistente, è sollecitato da una forza la di cui direzione è costantemente parallela ad una linea fissa; trovare la resistenza affinchè si possa descrivere una curva data.*

Se prendiamo la linea fissa per asse delle y, e dinotiamo la forza in ogni punto con Y e la resistenza con R, le equazioni del moto saranno

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - R\frac{dy}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Eliminando R, otteniamo

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = Y\frac{dx}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ora
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}};$$

quindi
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$= \frac{Y}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2};$$

o
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Differenziando rispetto a t, otteniamo

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)\frac{dx}{dt};$$

onde
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right);$$

e quindi per l'equazione (1)

$$R = -\frac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right) \text{................} (5).$$

Da questa equazione, se conosciamo Y, si può trovare la resistenza affinchè si descriva una curva data.

224. Se la resistenza varia come il prodotto della densità per l'n^{ma} potenza della velocità, le equazioni (4) e (5) si possono usare per trovare la legge della densità affinchè si possa descrivere una curva data. Infatti in questo caso R sarà rappresentata da $k\left(\frac{ds}{dt}\right)^n$, dove k è proporzionale alla densità in ogni punto, e deve essere determinato come una funzione di x ed y. Abbiamo allora da (5)

$$k\left(\frac{ds}{dx}\right)^n\left(\frac{dx}{dt}\right)^n = -\frac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right);$$

e quindi, da (4),

$$k = -\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dx}\right)^{1-n}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)^{-\frac{n}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right),$$

che, secondo che n è o non è eguale a 2, si può scrivere

$$k = \frac{1}{n-2}\left(\frac{ds}{dx}\right)^{1-n}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)^{\frac{2-n}{2}} \text{.........} (6);$$

o

$$k = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\log\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{..................} (7).$$

225. Le equazioni (5) e (6) si possono ancora chiaramente usare per determinare le leggi della forza con la quale una curva data può essere descritta, la densità essendo supposta conosciuta, e la direzione della forza essendo data.

Dall'equazione (3), otteniamo

$$\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{Y\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = \rho\,,$$

ρ essendo il raggio di curvatura. Quindi

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Y\rho\frac{dx}{ds}$$

$$= 2Y\left(\frac{1}{4} \text{ corda di curvatura parallela ad } y\right),$$

e quindi la velocità in ogni punto è la stessa di quella che si acquisterebbe da un elemento che cade nel vuoto per un quarto della corda di curvatura parallela alla linea fissa sotto l'azione di una forza uniforme eguale alla forza in quel punto.

226. *Un elemento, che si muove in un mezzo resistente è sollecitato da una forza centrale; trovare la resistenza affinchè si possa descrivere una curva data.*

P dinotando la forza centrale ed R la resistenza, le equazioni del moto sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -P\frac{x}{r} - R\frac{dx}{ds}\,,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -P\frac{y}{r} - R\frac{dy}{ds}.$$

Eliminando R, otteniamo

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{P}{r}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

o

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = P\frac{p}{r}\frac{ds}{dt}\,,$$

onde

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Pp\frac{dr}{dp} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1),$$

la quale mostra che la velocità è quella dovuta ad un quarto della corda di curvatura per il centro.

Ancora, eliminando P dalle equazioni del moto, otteniamo

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -R\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\frac{dt}{ds}\,,$$

o $$\frac{d}{dt}\left(p\frac{ds}{dt}\right) = -Rp;$$

onde $$p\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\left(p\frac{ds}{dt}\right) = -Rp^2;$$

quindi $$-2Rp^2 = \frac{d}{ds}\left\{p^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{d}{ds}\left(Pp^3\frac{dr}{dp}\right), \text{ da (1)};$$

e finalmente $$R = -\frac{1}{2p^2}\frac{d}{ds}\left(Pp^3\frac{dr}{dp}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

che determina la legge richiesta di resistenza.

227. Se la resistenza varia come il prodotto della densità e dell'n^{ma} potenza della velocità,

$$R = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^n,$$

e per le equazioni (1) e (2),

$$k\left(Pp\frac{dr}{dp}\right)^{\frac{n}{2}} = -\frac{1}{2p^2}\frac{d}{ds}\left(Pp^3\frac{dr}{dp}\right),$$

onde $$k = -\frac{p^{n-2}}{2}\left(Pp^3\frac{dr}{dp}\right)^{-\frac{n}{2}}\frac{d}{ds}\left(Pp^3\frac{dr}{dp}\right),$$

che, secondo che n è non è eguale a 2, si può scrivere

$$k = \frac{p^{n-2}}{n-2}\frac{d}{ds}\left(Pp^3\frac{dr}{dp}\right)^{\frac{2-n}{2}},$$

o $$k = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\log\left(Pp^3\frac{dr}{dp}\right).$$

Queste equazioni determinano o la legge della densità affinchè si possa descrivere una curva data, la forza essendo conosciuta, o la legge della forza supponendo conosciuta la densità.

228. *Un elemento, che si muove in un mezzo resistente di cui la resistenza varia come il prodotto della densità pel quadrato della velocità, è sollecitato da una forza centrale; determinare l'orbita.*

Questo si può dedurre immediatamente dal risultato dell'ultimo Articolo, ma daremo qui una investigazione diretta. Sia P la forza centrale; allora, prendendo le equazioni del moto secondo il raggio vettore, e perpendicolarmente ad esso, abbiamo

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -P - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dr}{ds} \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = -k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{rd\theta}{ds}.$$

Dividendo l'ultima di queste equazioni per $r\frac{d\theta}{dt}$, abbiamo

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{r^2\frac{d\theta}{dt}} = -k\frac{ds}{dt}.$$

Quindi
$$r^2\frac{d\theta}{dt} = he^{-\int k ds} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

h essendo la costante introdotta nell'integrazione e dipendente dalle circostanze iniziali.

Inoltre, se poniamo $r = \frac{1}{u}$, ed osserviamo che

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= -h\frac{du}{d\theta}e^{-\int k ds};$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}e^{-\int k ds}\frac{d\theta}{dt} + hk\frac{du}{d\theta}e^{-\int k ds}\frac{ds}{dt}$$
$$= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}e^{-2\int k ds} - k\frac{ds}{dt}\frac{dr}{dt};$$

sostituendo nell'equazione (1), ed usando la relazione

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dr}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{dr}{dt},$$

otteniamo

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}e^{-2\int k ds} - h^2u^3e^{-2\int k ds} = -P;$$

o finalmente $$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{Pe^{2\int kds}}{h^2u^2} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Le equazioni (1) e (2) differiscono da quelle del moto senza resistenza solamente nella modificazione dei loro ultimi termini dal fattore $e^{-\int kds}$ e dal suo quadrato inverso. Quando k è piccolo, non vi è difficoltà nell'integrarle approssimativamente con i metodi che saranno spiegati nel Cap. XI.

ESEMPII.

1. Un elemento è proiettato con una data velocità V in un mezzo uniforme in cui la resistenza varia come la radice quadrata della velocità; trovare qual tempo passerà prima che l'elemento si riduca in quiete.

$$\text{Tempo richiesto} = \frac{2V^{\frac{1}{2}}}{k}.$$

2. Un elemento proiettato con una velocità di 1000 piedi a secondo, perde metà della sua velocità passando per 3 pollici di un mezzo resistente di cui la resistenza è uniforme; trovare il tempo per attraversare questo spazio.

$$\frac{1}{3000} \text{ di secondo.}$$

3. Un elemento cade verso un centro di forza che varia come il cubo inverso della distanza, in un mezzo di cui la densità varia anche come il cubo inverso, e di cui la resistenza varia come il quadrato della velocità; dimostrare che ad ogni distanza x dal centro,

$$(\text{velocità})^2 = \frac{\mu}{k}\left\{1 - e^{-k\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right)}\right\},$$

dove μ = forza all'unità di distanza, k = densità all'unità di distanza, ed a = distanza dell'elemento dal centro al principio del suo moto.

L'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^3} + \frac{k}{x^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

o $$v\frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{x^3} + \frac{kv^2}{x^3}.$$

Sia $v^2 = z$;

onde $$\frac{dz}{dx} - \frac{2kz}{x^3} = -\frac{2\mu}{x^3}.$$

Si moltiplichi per $e^{\frac{k}{x^2}}$ e s' integri;

onde $$e^{\frac{k}{x^2}} z = C + \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{x^2}}.$$

Ora quando $x = a$, $z = v^2 = 0$; onde $C = -\frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{a^2}}$;

quindi $$z = v^2 = \frac{\mu}{k}\left\{1 - e^{-k\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right)}\right\}.$$

4. Un elemento sollecitato da una forza costante f, si muove dalla quiete, in un mezzo di cui la resistenza varia come il quadrato della velocità direttamente e come la distanza dal centro inversamente; trovare la velocità dell'elemento ad ogni distanza dall'origine, e la posizione dell'elemento quando la sua velocità è un massimo.

$$x^{-2k} v^2 = \frac{2f}{1 - 2k}\left(a^{1-2k} - x^{1-2k}\right), \quad x' = (2k)^{\frac{1}{1-2k}} a,$$

dove a è la distanza iniziale e k la resistenza quando x e v sono entrambe l'unità.

5. Se si tirano delle corde da ciascuna estremità di un diametro verticale di un circolo, il tempo della discesa per ciascuna di esse in un mezzo di cui la resistenza varia come la velocità, è la stessa.

6. Un elemento è proiettato con una data velocità, verso un centro di forza che attrae inversamente come il cubo della distanza, in un mezzo di cui la resistenza varia come il quadrato della velocità direttamente, e come il quadrato della distanza dal centro inversamente; trovare la velocità in ogni punto.

Qui $$e^{-\frac{2k}{a}} v^2 - e^{-\frac{2k}{x}} V^2 = \frac{\mu}{2k^2}\left(\frac{a - 2k}{a} e^{-\frac{2k}{x}} - \frac{x - 2k}{x} e^{-\frac{2k}{a}}\right),$$

dove V è la velocità di proiezione, μ la forza assoluta attrattiva, k la resistenza all'unità di distanza, a la distanza iniziale, ed x la distanza dell'elemento corrispondente alla velocità v.

7. Un elemento incomincia a cadere dall'estremità più alta di una linea verticale, e nello stesso istante un altro elemento è

proiettato in su dall'altra estremità con una data velocità, gli elementi movendosi in un mezzo di cui la resistenza varia direttamente come la velocità; mostrare che il tempo nel quale essi s'incontreranno $=\frac{1}{k}\log\frac{V}{V-ka}$, dove a è la lunghezza della linea verticale, V la velocità di proiezione, e k la resistenza per una unità di velocità.

8. Un elemento sollecitato dalla gravità cade da una data altezza in un mezzo uniforme di cui la resistenza varia come il quadrato della velocità; nell'arrivare al punto più basso della sua discesa esso è riflesso in su con la velocità che ha acquistato nella sua caduta, dopo di aver raggiunto la sua più grande altezza esso discende di nuovo ed è di nuovo riflesso, e così perpetuamente; determinare l'altezza della salita dopo un numero qualunque di riflessioni.

Sia a l'altezza da cui l'elemento cade, a_1, a_2, a_3, etc. le sue massime altezze successive, v_1, v_2, v_3, etc. le sue velocità dopo il primo, secondo, etc. tempo dell'arrivo alla base, allora (Art. 216),

$$v_1^2 = K^2\left(1 - e^{\frac{-2fa}{K^2}}\right),$$

ed

$$\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2} = \frac{1}{K^2},$$

$$\frac{1}{v_3^2} - \frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{K^2},$$

....

....

$$\frac{1}{v_n^2} - \frac{1}{v_{n-1}^2} = \frac{1}{K^2}.$$

Addizionando

$$\frac{1}{v_n^2} - \frac{1}{v_1^2} = \frac{n-1}{K^2}.$$

Quindi

$$\frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{K^2}\left(n - 1 + \frac{1}{1 - e^{\frac{-2fa}{K^2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{K^2}\left\{\frac{n - (n-1)\,e^{\frac{-2fa}{K^2}}}{1 - e^{\frac{-2fa}{K^2}}}\right\};$$

onde
$$\frac{v_n^2}{K^2} = \frac{e^{\frac{2fa}{K^2}} - 1}{ne^{\frac{2fa}{K^2}} - n + 1}.$$

L'elemento è ora proiettato in su con una velocità v_n, quindi (Art. 216)
$$a_n = \frac{K^2}{2f} \log\left(1 + \frac{v_n^2}{K^2}\right)$$
$$= \frac{K^2}{2f} \log \frac{(n+1)\, e^{\frac{2fa}{K^2}} - n}{ne^{\frac{2fa}{K^2}} - n + 1}.$$

Se a è eguale all'infinito,
$$a_n = \frac{K^2}{2f} \log \frac{n+1}{n}.$$

9. Determinare la legge della forza affinchè un elemento possa sempre discendere ad un dato centro nello stesso tempo da qualunque distanza esso incominci il suo movimento, il mezzo nel quale l'elemento si muove essendo uniforme, e la resistenza variando come il quadrato della velocità.

10. Se un elemento è proiettato in un mezzo, di cui la resistenza varia come la velocità, ed è sollecitato da una forza costante parallela ad una data linea, ed un altro elemento è proiettato nel vuoto sotto lo stesso angolo e con la stessa velocità ed è sollecitato dalla stessa forza costante, se t_1, t_2 sono i tempi per descrivere due archi nel mezzo e nel vuoto in tale relazione tra loro che le tangenti nelle loro estremità siano tra loro parallele, allora $e^{kt_1} - 1 = kt_2$, k essendo la resistenza corrispondente alla velocità 1.

11. Un elemento si muove in un semicircolo, sollecitato da una forza costante in linee parallele; trovare la resistenza richiesta, e supponendo che la resistenza varii come il prodotto della densità pel quadrato della velocità, trovare la legge della densità.

Sia l'equazione del circolo $x^2 + y^2 = a^2$, e la forza parallela ad y; allora R come x, k come $\frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

12. Un elemento sollecitato da una forza costante parallela

all'asse delle y si muove nella curva $a^{n-1}y+x^n=b^n$; trovare la legge della resistenza.

$$R \text{ come } \frac{\sqrt{(a^{2n-2}+n^2x^{2n-2})}}{x^{n-1}}.$$

13. Un elemento sollecitato da una forza costante parallela all'asse delle y si muove nella curva, $y=mx+\frac{a^{n+1}}{x^n}$; trovare la legge della densità, la resistenza variando come il prodotto della densità pel quadrato della velocità.

$$k \text{ come } \frac{x^n}{\left\{x^{2n+2}+(mx^{n+1}-na^{n+1})^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

14. Un elemento si muove in un circolo intorno ad un centro di forza nella circonferenza, la forza essendo attrattiva ed $=\mu r^n$; trovare la resistenza del mezzo e la legge della densità, supponendo la resistenza eguale al prodotto della densità pel quadrato della velocità.

$$R=\frac{\mu}{4}(n+5)\,r^n \operatorname{sen}\theta, \quad k=\frac{n+5}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}.$$

15. Un elemento si muove verso il polo in una spirale equiangola intorno ad un centro di forza nel polo, la forza essendo μr^n; trovare la resistenza e la densità del mezzo, la resistenza essendo eguale al prodotto della densità pel quadrato della velocità.

$$R=\frac{\mu(n+3)}{2}r^n\cos\alpha, \quad k=\frac{n+3}{2}\frac{\cos\alpha}{r},$$

dove α è l'angolo costante della spirale.

16. Un elemento si muove nella circonferenza di un circolo intorno ad un centro di forza nel centro, la resistenza del mezzo nel quale il movimento ha luogo essendo costante; trovare la legge della forza, la velocità ad ogni tempo, ed il tempo scorso come anche lo spazio descritto prima che l'elemento si riduca in quiete.

$$v^2=V^2-2cs, \quad P=\frac{1}{a}(V^2-2cs), \quad S=\frac{V^2}{2c}, \quad T=\frac{V}{c},$$

dove V = velocità iniziale, c = forza costante di resistenza, a =

raggio del circolo, s l'arco descritto dal principio del moto, S e T lo spazio ed il tempo corrispondenti all'elemento ridotto in quiete.

17. Un elemento è proiettato lungo un circolo levigato con velocità V in un mezzo di cui la resistenza è come v^2. Dimostrare che quando la direzione del moto si è cambiata di un angolo φ la velocità $= Ve^{-k\varphi}$.

18. Un elemento si muove verso il polo in una spirale equiangola, il moto avendo luogo in un mezzo di cui la resistenza $= kr^n$; trovare la legge della forza centrale attrattiva nel polo.

$$P = \frac{(n+3)\cos\alpha\, a^2 V^2 + 2k\,(r^{n+3} - a^{n+3})}{(n+3)\cos\alpha\, r^3},$$

dove $V =$ velocità iniziale, ed $\alpha =$ angolo costante della spirale.

19. Se un elemento sollecitato da una forza centrale P si muove in un mezzo di cui la resistenza $= k$ (velocità), dimostrare che

$$\frac{d^2r}{dt^2} + P - \frac{h^2}{r^3}e^{-2kt} + k\frac{dr}{dt} = 0,$$

dove h è una costante arbitraria.

20. Un elemento pesante che si muove in un mezzo di cui la resistenza $= nv^2$, è forzato a descrivere in un piano verticale la curva

$$ax = e^{ns} - ns - 1,$$

dove s è la lunghezza della curva misurata dal punto più basso, x l'ascissa dell'estremità di quest'arco riferito ad un asse verticale, ed a una costante; mostrare che il tempo per raggiungere il punto più basso è indipendente dall'altezza dalla quale esso parte.

21. Mostrare che la curva nell'ultima questione è anche tautocrona se la resistenza $= mv + nv^2$.

22. Un elemento pesante si muove in un mezzo in cui la resistenza varia come il quadrato della velocità, V_1, V_2 sono le sue velocità nei due punti in cui la sua direzione del moto fa un angolo φ con l'orizzonte, e V la sua velocità nel punto più alto; dimostrare che

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{2\cos^2\varphi}{V^2}.$$

23. Un elemento di peso W si muove sotto l'azione della gra-

vità in un mezzo di cui la resistenza R è sempre piccola e varia secondo una data legge; mostrare che la velocità del fuoco della parabola istantanea ad ogni tempo è $\frac{R}{W} \times$ velocità dell'elemento.

24. Un elemento non sollecitato da forze, è costretto a muoversi sulla curva $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$ in un mezzo uniforme di cui la resistenza varia come la velocità. Dimostrare che la pressione sulla curva ad ogni tempo t varia inversamente come $y^2 e^{2kt}$, dove k è una costante.

25. Un elemento pesante di massa m scende per una cicloide levigata il di cui asse è verticale ed il vertice in su, in un mezzo di cui la resistenza è $\frac{mv^2}{2c}$, e la distanza del punto di partenza dal vertice è c; dimostrare che il tempo sino alla cuspide è $\sqrt{\frac{8a}{g}\left(\frac{4a}{c} - 1\right)}$, $2a$ essendo la lunghezza dell' asse.

26. Determinare il movimento di un corpo sollecitato da una forza attrattiva verso un centro fisso e proporzionale alla distanza in un mezzo di cui la resistenza è proporzionale alla velocità.

Un corpo esegue delle vibrazioni rettilinee in questo mezzo in un periodo T, e le coordinate delle estremità di tre semi vibrazioni consecutive sono a, b, c; dimostrare che la coordinata della posizione di equilibrio ed il tempo della vibrazione se non vi è alcuna resistenza sono rispettivamente

$$\frac{ac - b^2}{a + c - 2b} \quad \text{e} \quad T\left\{1 + \frac{1}{\pi^2}\left(\log\frac{a-b}{c-b}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

27. Un elemento si muove in un mezzo resistente; si stabiliscano delle ragioni, provenienti dal principio della conservazione della quantità di moto che rendono probabile che la resistenza in ogni punto varii come la densità del mezzo in quel punto, ed il quadrato della velocità dell' elemento in moto.

Un elemento descrive nel mezzo un' ellisse sotto l' azione di due forze che tendono ai fuochi e che variano inversamente come l' n^{ma} potenza della distanza; trovare la densità del mezzo in ogni punto della traiettoria; e mostrare che se le forze variano inversamente come la distanza, i loro valori assoluti essendo gli stessi, la densità varia come l' accelerazione con la quale l' elemento si

muoverebbe in un mezzo non resistente, sotto l'azione delle stesse forze se esso fosse costretto a muoversi nell'ellisse.

28. Un elemento è sospeso in modo da oscillare in una cicloide il di cui vertice è nel punto più basso: se esso incomincia a muoversi da un punto alla distanza α dal punto più basso misurato secondo la curva, ed il mezzo nel quale si muove dà una piccola resistenza kv^2 all'accelerazione, dimostrare che prima di essere l'elemento prossimo alla quiete si è dissipata un'energia che è $\frac{8k\alpha}{3}$ del suo primitivo valore.

FINE DEL VOLUME PRIMO.